

課題名: 超幾何微分方程式の計算解析 (基盤研究 B)

課題番号: 15340045. 平成 15 年度—平成 18 年度

研究組織

研究代表者: 高山信毅 (神戸大学)

研究分担者: 大阿久俊則 (東京女子大学)

研究分担者: 齋藤睦 (北海道大学)

研究分担者: 野呂正行 (神戸大学)

研究分担者: 福山克司 (神戸大学)

研究分担者: 増田哲 (京都大学)

研究分担者: 松本圭司 (北海道大学)

本報告書は“基盤研究 B, 超幾何微分方程式の計算解析”に関連して発表した論文のリストの他, プレプリント等をまとめて, “超幾何微分方程式の計算解析”を総括するとともに, 今後の発展を展望する資料を目指している.

1 概説

A -超幾何関数の満たす方程式系を A -超幾何方程式系とよぶ。超幾何微分方程式は多変数の連立線形偏微分方程式系である。この微分方程式系を調べることにより、多変数超幾何関数のさまざまな性質を知ることができる。

20 世紀後半の超幾何関数の研究は、主に二つの理論つまりサイクルとコサイクルの理論か D -加群の理論を利用してすすめられてきた。1990 年代より超幾何関数を解析する第 3 の方法が出現した。それは超幾何微分方程式を計算機による“計算”または計算の手法からうまれた理論的方法により具体的に解析し、さらに超幾何関数の性質を調べる方法である。

本研究では、超幾何微分方程式系の様々な計算解析問題を考察しかつその応用をさぐるべく関連分野との共同研究も進めた。成果は以下のとおり。

1. A -超幾何微分差分方程式, Modified A -超幾何方程式, affine toric variety 上の D -加群等, 元々の A -超幾何系のよい性質を受けつぐ新しい方程式系を提案した。
2. D -加群の局所的取り扱いのためのアルゴリズムを整備した。
3. 多変数超幾何関数, 積分の数値計算法の基礎を与えた。
4. 多変数超幾何関数の電子公式集を作るための基盤を整備した。
5. 超幾何関数の代数幾何への応用や可積分系への応用をさらに進展させた。

また本研究費を用いて集会“超幾何方程式研究会”を毎年開催し、超幾何方程式の幅広い側面を明らかにしていくことに寄与した。国際的研究集会としては“2nd international congress of mathematical software”に主体的に関与し、超幾何方程式の研究に必要なさまざまな数学ソフトウェアについての有益なフィードバックを得た。

現在、萌芽の状態であるが今後取り組みを開始してみたい研究テーマをあげる。

1. 変数の数が多い超幾何多項式, 超幾何級数をマルコフ連鎖モンテカルロ法などの最新の乱数生成方法を活用して数値計算する。
2. D -加群の局所的取り扱いのためのアルゴリズム, とくに $\mathcal{O}/I \cdot \mathcal{O}$ の計算. ここで I は D の左イデアル。
3. 特異点解消アルゴリズムと真島の不確定特異点での級数解構成アルゴリズムの融合。
4. 定義域の実代数幾何と実領域での接続公式。
5. 代数方程式系の超幾何解。

2 本報告集収録の資料, 解説, 論文等

本報告集には以下の解説のプレプリント, プレプリント, 資料等を掲載した.
Links to projects 以外はまだ未発表のプレプリントである.

1. Links to projects (数学ソフトのリスト). 高山, 野呂 他編
2. ICMS2006 video アーカイブの目次.
3. 超幾何方程式研究会のプログラム.
4. \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式の解空間の次元公式. 小原功任, 高山信毅
5. 平面 3 次曲線 Hasse 標準形に関する周期. 松本圭司
6. On regular b-functions for D -modules. 大阿久俊則

3 発表文献リスト

1. Katsuyoshi Ohara, Yuichi Sugiki, and Nobuki Takayama, Quadratic Relations for Generalized Hypergeometric Functions ${}_pF_{p-1}$, Funkcialaj Ekvacioj 46 (2003), 213–251.
2. Nobuki Takayama, Generating Kummer Type Formulas for Hypergeometric Functions, Algebra, Geometry, and Mathematica Software, Springer, Edited by Michael Joswig and Nobuki Takayama, 131–145.
3. Francisco Castro-Jimenez and Nobuki Takayama, Singularities of the Hypergeometric System associated with a Monomial Curve. Transaction of the American Mathematica Society, 355 (2003), 3761–3775.
4. Edited by M.Joswig and N.Takayama, *Algebra, Geometry and Software Systems* Springer, 2003.
5. Yasushi Tamura, Isao Hasegawa, Hiromasa Nakayama, Nobuki Takayama, Shuhei Todo, Design and Implementation of a Digital Formula Book for Generalized Hypergeometric Functions, Proceedings of IAMC 2003 (Electronic proceedings at symbolicnet.org), 2003, <http://www.symbolicnet.org/conferences/iamc03/program.html>
6. Toshinori Oaku, Yoshinao Shiraki, Nobuki Takayama, Algebraic Algorithms for D -modules and Numerical Analysis, Z.M.Li, W.Sit (editors), Computer Mathematics, Proceedings of the sixth asian symposium, 23–39, World scientific, 2003.

7. Michel Granger, Toshinori Oaku, Nobuki Takayama, Tangent cone algorithm for homogenized differential operators, *Journal of Symbolic Computation* 39 (2005), 417–431.
8. Nobuki Takayama, An Algorithm for Constructing Cohomological Series Solutions of Holonomic Systems, *Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*, **10**, No.4, (2003) 2–11.
9. Rouchdi Bahloul and Nobuki Takayama, Local Gröbner fan: polyhedral and computational approach, 2005, math.AG/0412044
10. 高山信毅 (Nobuki Takayama), OpenXM プロジェクトの過去, 現在, 未来. 数式処理 (*Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*), **12**, No. 1 (2005), 51–56.
<http://www.jssac.org/Editor/Suushiki/V12/v121.html>
11. Edited by Nobuki Takayama and Andres Iglesias, Proceedings of ICMS 2006, Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 4151, 2006.
12. Rouchdi Bahloul and Nobuki Takayama, Local Grobner Fan, to appear in C.R. Acad.Sci. Paris, Ser. I.
13. Nobuki Takayama, Kan — A system for doing algebraic analysis by computer. Distributed from <http://www.openxm.org>
14. Saito, Mutsumi; Traves, William N., Finite generations of rings of differential operators of semigroup algebras. Proceedings of the 36th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 26–31, Symp. Ring Theory Represent Theory Organ. Comm., Yamanashi, 2004.
15. Saito, Mutsumi; Traves, William N., Finite generation of rings of differential operators of semigroup algebras. *J. Algebra* 278 (2004), no. 1, 76–103.
16. 齋藤 睦:「グレブナー基底の現在」(日比孝之編) 数学書房 (2006) (第7章 決定方程式系とグレブナー基底)
17. Saito, Mutsumi: Primitive ideals of the ring of differential operators on an affine toric variety, math.RA/0505667 to appear in *Tohoku Mathematical Journal*.
18. Matsumoto, Keiji, Algebraic relations among some theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{r,r}$. *Kyushu J. Math.* 60 (2006), no. 1, 63–77.

19. Matsumoto, Keiji; Terasoma, Tomohide, Theta constants associated to coverings of P^1 branching at eight points. *Compos. Math.* 140 (2004), no. 5, 1277–1301.
20. Matsumoto, Keiji Automorphic forms on the complex and real balls derived from theta constants. With an appendix by Masaaki Yoshida. *Kyushu J. Math.* 58 (2004), no. 1, 71–104.
21. Matsumoto, Keiji; Terasoma, Tomohide, Theta constants associated to cubic threefolds. *J. Algebraic Geom.* 12 (2003), no. 4, 741–775.
22. Granger, Michel; Oaku, Toshinori, Minimal filtered free resolutions for analytic D -modules. *J. Pure Appl. Algebra* 191 (2004), no. 1-2, 157–180.
23. 大阿久俊則：微分作用素環の斉次化と確定特異点型 D 加群、日比孝之編「グレブナー基底の現在」(数学書房、2006)、pp.176–196.
24. Tsuda, Teruhisa; Masuda, Tetsu, q -Painleve VI equation arising from q -UC hierarchy. *Comm. Math. Phys.* 262 (2006), no. 3, 595–609.
25. Masuda, Tetsu, Special polynomials associated with the Noumi-Yamada system of type $A_5^{(1)}$. *Funkcial. Ekvac.* 48 (2005), no. 2, 231–246.
26. Masuda, Tetsu, The anti-self-dual Yang-Mills equation and classical transcendental solutions to the Painleve II and IV equations. *J. Phys. A* 38 (2005), no. 30, 6741–6757.
27. Kajiwara, K.; Masuda, T.; Noumi, M.; Ohta, Y.; Yamada, Y., Cubic pencils and Painleve Hamiltonians. *Funkcial. Ekvac.* 48 (2005), no. 1, 147–160.
28. Kajiwara, K.; Masuda, T.; Noumi, M.; Ohta, Y.; Yamada, Y., Construction of hypergeometric solutions to the q -Painleve equations. *Int. Math. Res. Not.* 2005, no. 24, 1439–1463.
29. Masuda, Tetsu, Classical transcendental solutions of the Painleve equations and their degeneration. *Tohoku Math. J. (2)* 56 (2004), no. 4, 467–490.
30. Kajiwara, K.; Masuda, T.; Noumi, M.; Ohta, Y.; Yamada, Y., Hypergeometric solutions to the q -Painleve equations. *Int. Math. Res. Not.* 2004, no. 47, 2497–2521.

31. Masuda, Tetsu On a class of algebraic solutions to the Painleve VI equation, its determinant formula and coalescence cascade. *Funkcial. Ekvac.* 46 (2003), no. 1, 121–171.
32. Kajiwara, Kenji; Masuda, Tetsu; Noumi, Masatoshi; Ohta, Yasuhiro; Yamada, Yasuhiko, ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painleve equation. *J. Phys. A* 36 (2003), no. 17, L263–L272.
33. Masuda, Tetsu, On the rational solutions of q -Painleve V equation. *Nagoya Math. J.* 169 (2003), 119–143.
34. Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equation, K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, to appear in *Seminaires et Congres* 14, 175-204.
35. Fukuyama, K., Gap series and functions of bounded variation. *Acta Math. Hungar.* 110 (2006), no. 3, 175–191.
36. Fukuyama, K., A concrete upper bound in the uniform law of the iterated logarithm. *Studia Sci. Math. Hungar.* 41 (2004), no. 3, 339–346.
37. Fukuyama, K., An asymptotic property of gap series. III. *Acta Math. Hungar.* 103 (2004), no. 1-2, 97–106.
38. Fukuyama, K.; Petit, B. An asymptotic property of gap series. II. *Acta Math. Hungar.* 98 (2003), no. 3, 245–258.
39. Noro, M.: An Efficient Implementation for Computing Groebner Bases over Algebraic Number Fields, in *Proceedings of ICMS 2006, LNCS4151*, Springer (2006), 99-109.
40. Noro, M.: Modular Dynamic Evaluation, in *Proceedings of ISSAC 2006, ICM Press (2006)*, 262-268.
41. Kawano, Y., Kimura, K., Sekigawa, H., Noro, M., Shirayanagi, K., Kitagawa, M., Ozawa. M.: Existence of the exact CNOT on a quantum computer with the exchange interaction, *Quantum Information Processing*, 4(2) (2005), 65-85.
42. 野呂 正行: Dynamic Evaluation の実装について, *数式処理* vol. 11, No. 3,4 (2005), 21-18.
43. Noro, M. and Yokoyama, K.: Implementation of prime decomposition of polynomial ideals over small finite fields, *Journal of Symbolic Computation*, 38, (2004) 1227-1246

44. Noro, Masayuki; Yokoyama, Kazuhiro Implementation of prime decomposition of polynomial ideals over small finite fields. *J. Symbolic Comput.* 38 (2004), no. 4, 1227–1246.

Links to Projects. Mathematical Software, icms2006—developer’s meeting

This document is a collection of links and descriptions of projects related to icms2006—developer’s meeting.

1. **ActiveMath**

<http://www.activemath.org>

License: Free and open-source for public educational institution

ActiveMath is a learning environment for mathematics. It is a web-server based on java servlets which presents semantic OMDoc content to contemporary web-browsers with good quality.

ActiveMath supports the learning experience by modelling the learners’ competencies in a learner-model that is fed by tracking the reading and the interactive exercises. The interactive exercises can be rich and multiple-steps exercises and use computer-algebra-systems to evaluate a learner’s input.

The content items of ActiveMath are annotated with pedagogical and mathematical knowledge which allows the learner to obtain courses prepared on demand on given learning goals.

Finally, the semantic OMDoc representation allows copy-and-paste of formulae and search for content items by text, annotations, or formulae.

2. **Aldor**

<http://www.aldor.org>

License: Other (BSD like)

Aldor is a computer programming language, like Scheme, Java or C#.

3. **Algorithms in real algebraic geometry (interactive book)**

<http://perso.univ-rennes1.fr/marie-francoise.roy/bpr-posted1.html>

License: GPL, others

Algorithms in real algebraic geometry, by S. Basu, R. Pollack and M.-F. Roy, is a preliminary test version of an extension of the first edition published by Springer in 2003. This interactive book is based on texmacs, and live examples can be computed within the book through the SARAG maxima library by F. Caruso. The final version is due to be published by Springer.

4. **Arageli**

<http://www.unn.ru/cs/arageli>

License: Free for academic and noncommercial use

Arageli is a C++ library for doing symbolic computations. It contains arbitrary precision integer and rational numbers, vectors, matrices, polynomials, modular arithmetic, algorithms for number factorization, linear and integer programming etc. Creating new mathematical structures from existing ones (also in other libraries) is easy. Arageli is used in Skeleton, Integizer, Prelinea projects.

5. **The Atlas of Lie Groups and Representations**

<http://atlas.math.umd.edu/>

License:

This is a project to make available information about representations of semi-simple Lie groups over real and p-adic fields. The software is in an early stage of development. Given a general connected complex group G , the software will compute among other things: parameters for the irreducible representations of G with regular integral infinitesimal character, Kazhdan-Lusztig polynomials for representations with regular integral infinitesimal character, etc. (Alfred G. Noel, University of Massachusetts Boston)

6. **BESSELINT**

<http://www.cs.kuleuven.be/~nines/software/BESSELINT/>

License:

BESSELINT is a Matlab program to compute integrals of the form

$$\int_0^{\infty} x^m \prod_{i=1}^k J_{\nu_i}(a_i x) dx$$

with $J_{\nu_i}(x)$ the Bessel function of the first kind and (real) order ν_i . The parameter m is a real number such that $\sum_i \nu_i + m > -1$ and the coefficients a_i are strictly positive real numbers. In the near future this will be extended to compute the Laplace transform of a product of Bessel functions with possibly an additional factor of $1 + dx^2$ in the denominator (where d is a real number). (Joris Van Deun and Ronald Cools, K.U.Leuven)

7. **CoCoA4**

<http://cocoa.dima.unige.it/>

License: The executables are free

The interactive system CoCoA-4.6 offers facilities for COmputations in COmmutative Algebra: Gröbner bases and related operations on ideals and modules, Hilbert functions, factorization of polynomials, and some exact linear algebra. CoCoA-4.6 is well-suited to teaching with its simple and mathematically natural command language, and an extensive online help facility. It is free and runs on most common platforms.

8. **CoCoALib**

<http://cocoa.dima.unige.it/>

License: GPL, others

The C++ library CoCoALib offers data structures and operations for COmputations in COmmutative Algebra, most particularly Gröbner bases. Ease of use through a clean design is paramount (with some concessions to guarantee good performance). The library comes with full documentation and numerous example programs. A “beta” release is anticipated in late 2006. A server and interactive system are planned.

9. **Computer Algebra Animation**

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/caa>

License: GPL

An experimental project for algorithm animations and graphical or interactive user interface in computer algebra with Java and OpenXM.

10. **Coq**

<http://coq.inria.fr>

License: LGPL

Coq is a proof assistant.

11. **DEpthLAUNAY**

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/delonedepth/>

License: QPL

DEpthLAUNAY is a C++ software developed with CGAL (<http://www.CGAL.org>) that computes the following geometric structures given a finite set of points in the plane: convex hull, convex layers, convex levels, Delaunay triangulation, Delaunay layers, Delaunay levels, and Voronoi diagram. Input points can be randomly generated, introduced interactively or simply acquired from image files. (Manuel Abellanas, Universidad Politecnica de Madrid)

12. **Epsilon**

<http://www-calfor.lip6.fr/~wang/epsilon>

License: Free for academic and noncommercial use

Epsilon is a library of functions implemented in Maple and Java for polynomial elimination and triangular decomposition with (geometric) applications. It has 8 modules and contains more than 70 functions, with documentation, examples, and Maple worksheets. (Dongming Wang, Beihang University, China and UPMC-CNRS, France)

13. **GAP**

<http://www.gap-system.org>

License: GPL

GAP is a system for computational discrete algebra, with particular emphasis on Computational Group Theory. GAP provides a programming language, a library of thousands of functions implementing algebraic algorithms written in the GAP language as well as large data libraries of algebraic objects.

14. **GAP package Alnuth**

<http://www.gap-system.org/Packages/alnuth.html>

License: GPL

The Alnuth package provides various methods to compute with number fields which are given by a defining polynomial or by generators. Some of the methods provided in this package are written in GAP code. The other part of the methods is imported from the Computer Algebra System KANT.

15. **GCLC/WinGCLC**

<http://www.matf.bg.ac.yu/~janicic/gclc/>

License: Free for academic and noncommercial use

GCLC/WinGCLC is a tool for visualizing and teaching geometry (and not only geometry), and for producing mathematical illustrations. It has support for a range of geometrical constructions and transformations, for symbolic expressions, parametric curves, program loops, for automated proving of geometrical conjectures, for exporting figures into LaTeX and bitmap format etc.

16. **GEX**

<http://www.mmrc.iss.ac.cn/gex/>

License:

Geometry Expert (GEX) is a software for dynamic geometric diagram drawing and automated geometry theorem proving and discovering. As a dynamic geometry software, GEX can be used to build dynamic visual models to assist manipulating and teaching various mathematical concepts. As an automated reasoning software, GEX can be used to prove and discover hundreds of non-trivial geometry theorems automatically. Geometry Expert (GEX) is a software for dynamic geometric diagram drawing and automated geometry theorem proving and discovering. As a dynamic geometry software, GEX can be used to build dynamic visual models to assist manipulating and teaching various mathematical concepts. As an automated reasoning software, GEX can be used to prove and discover hundreds of non-trivial geometry theorems automatically.

17. **Gfan**
<http://home.imf.au.dk/ajensen/software/gfan/gfan.html>
License:
Gfan is a command line tool for enumerating the reduced Gröbner bases of a polynomial ideal in n variables. Hereby the Gröbner fan, an n -dimensional polyhedral complex, is computed. The tropical variety is a certain subcomplex which can also be computed by the software. Gfan uses Gmp and Cddlib for exact arithmetic and polyhedral computations, respectively.
18. **GiNaC**
<http://www.ginac.de/>
License: GPL
GiNaC looks like a computer algebra system and a library, but the name GiNaC is an iterated and recursive abbreviation for GiNaC is Not a Computer Algebra System.
19. **GloptiPoly**
<http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly>
License: GPL, requires Matlab
Matlab/SeDuMi add-on to build and solve convex LMI relaxations of the (generally non-convex) global optimization problem of minimizing a multi-variable polynomial function subject to polynomial inequality, equality or integer constraints. (Didier Henrion and Jean-Bernard Lasserre, LAAS-CNRS, Toulouse, France)
20. **GiANT: Graphical Algebraic Number Theory**
<http://giantsystem.sourceforge.net>
License: GPL
GiANT is a graphical interface for working with number fields. GiANT offers interactive diagrams, drag-and-drop functionality, and typeset formulas. GiANT is written in Java, but uses KASH to perform its computations.
21. **GMP: GNU Multiple Precision Arithmetic Library**
<http://www.swox.com/gmp>
License: LGPL
GMP is a free library for arbitrary precision arithmetic, operating on signed integers, rational numbers, and floating point numbers. There is no practical limit to the precision except the ones implied by the available memory in the

machine GMP runs on. GMP has a rich set of functions, and the functions have a regular interface.

22. **HOL Light**

<http://www.cl.cam.ac.uk/users/jrh13/hol-light/index.html>

License: Custom BSD-like

HOL Light is a theorem prover for classical higher-order logic. It is a rationalized re-implementation in Objective CAML (OCaml) of Mike Gordon's original HOL system. HOL Light generates proofs using very low-level primitive inference steps, but has numerous higher-level automated rules and a good library of pre-proved mathematics. (John Harrison.)

23. **jReality**

<http://www.jreality.de>

License:

jReality is a library that allows for interactive manipulation of scientific data on a wide variety of platforms. It is written in Java. The output media include software only Java rendering, hardware accelerated OpenGL rendering stereo viewing, immersive virtual reality applications like in the PORTAL as well as file formats like PIXAR's renderman and SVG.

24. **jtem - Java Tools for Experimental Mathematics**

<http://www.jtem.de>

License: GPL

jtem is a collection of mostly mathematical tools and algorithms implemented in Java. The libraries include a wide range from complex numbers to theta-functions, basic linear algebra and adaptive ODE solvers.

25. **Kan/sm1**

<http://www.openxm.org>

License: GPL, LGPL

Kan/sm1 is originally developed for a computer algebra system for the ring of differential operators D . It is designed to be a backend system with a postscript-like small language. It is now used for a controller of OpenXM communications behind as well as a system for the D .

26. **KASH/KANT**

<http://www.math.tu-berlin.de/~kant/kash.html>

License: Other

KASH/KANT is a computer algebra system specialized for algebraic number theory and its applications. It offers powerful functions for working with number fields, function fields, and local fields, as well as functions for solving Diophantine equations. The KANT shell KASH provides a programming language and an interactive help system.

27. **KENZO**

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo>

License:

KENZO program is a Common Lisp Object System (CLOS) whose purpose is to compute various invariants in Algebraic Topology Framework (mainly homology groups). It implements and uses numerous algebraic structures as

dg-algebras, simplicial groups, morphisms, reductions, chain complexes, etc. It allows to compute homology groups of sophisticated spaces.

28. **KENZO package for A-infinity structures: ARAIA and CRAIC**
<http://www.ehu.es/aba/investigation.htm>
License:
The package component we add to KENZO allows us to compute A-infinity-(co)algebra structures induced on the small module of a reduction if the big dg-module is a (co)algebra. (Ainhoa Berciano Alcaraz)
29. **KETpic**
<http://www.kisarazu.ac.jp/~masa/math/E.html>
License: Free for academic and noncommercial use
KETpic is a macro package for Maple, which generates \TeX source codes for clear drawings. This supports users to draw every kind of complicated figure easily with the highest accuracy. The current version as well as the latest Maple runs on major OS: Windows, Mac and Linux. One can download the package, various samples, the command reference and a template of \TeX source from the indicated web site. (Masayoshi SEKIGUCHI)
30. **KNOPPIX/math**
<http://www.knoppix-math.org>
License:
KNOPPIX/Math is a project to archive free mathematical software and free mathematical documents and provide them on KNOPPIX.
31. **libMpIeee**
<http://www.mpieee.ua.ac.be>
License:
libMpIeee is a C++ software library for radix 2^n or 10^m mixed precision floating-point arithmetic, that is fully compliant with the IEEE 754/854 standards for floating-point arithmetic.
This implies, among others, that the basic operations as well as the remainder and square root operations are exactly rounded, involving a relative error of at most 0.5 units in the last place (ULP) for round to nearest and 1 ULP for directed roundings. As required by the IEEE 754/854 standards, libMpIeee also provides denormal numbers, signed zeroes, signed infinities and NaN (Not-a-Number).
Moreover, the conversions between decimal and binary are implemented to satisfy the same error bound as the basic operations. The elementary functions are computed with a relative error of at most 1 ULP for round to nearest and 2 ULP for directed roundings. More information on the implementation of these elementary functions can be found in the contribution "Towards reliable software for the evaluation of a class of special functions" by Annie Cuyt and Stefan Becuwe.
32. **Linbox**
<http://www.linalg.org>
License: LGPL
LinBox is a C++ template library for exact, high-performance linear algebra computation.

33. **LiveTeXmacs**

<ftp://math.cgu.edu.tw/pub/KNOPPIX>

License: GPL

LiveTeXmacs is a knoppix-based live distribution for mathematical education. Many mathematical software systems (Axiom, Gnuplot, Maxima, Octave, R etc) are integrated in this distribution. In addition to this, it also includes free documentations for calculus, mathematical (2D/3D) visualization and stochastic processes etc, which are made by TeXmacs.

Web applications, such as PHP, Python, Apache, SQL and Zope etc, are also supported. Especially, the Web Mathematics Interactive is pre-installed as the web application for Maxima, Gnuplot and more. Pre-installed development environment gives a scalability of the distribution even with very few knowledge about linux.

34. **Logiweb**

<http://logiweb.eu/>

License: GPL

Logiweb is an infrastructure for publication and archival of machine verified mathematics. It allows users to publish definitions, theories, lemmas, proofs, and computer programs. The system allows proofs to reference previously published material across the Internet so that users in different sites may build on top of the work of each other. (Klaus Grue, University of Copenhagen)

35. **Macaulay2**

<http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>

License: GPL

Macaulay2 is a software system to support researches in algebraic geometry and commutative algebra.

36. **Magma**

<http://magma.maths.usyd.edu.au>

License: Commercial

Magma is a large, well-supported software package designed to solve computationally hard problems in algebra, number theory, geometry and combinatorics. It provides a mathematically rigorous environment for computing with algebraic, number-theoretic, combinatoric and geometric objects.

37. **Maple**

<http://www.maplesoft.com>

License: Commercial

Maple is a tool for solving mathematical problems and creating interactive technical applications.

38. **Mathematica**

<http://www.wolfram.com>

License: Commercial

Mathematica is a system for doing mathematics. The site also provides <http://functions.wolfram.com> (a data base for special functions) and <http://library.wolfram.com> (a collection of notebooks).

39. **math-polyglot**

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/math-polyglot>

License: GFL, BSD

This project is started for editing icms2006 — developer's meeting DVD's. It provides sample codes for mathematical software systems in our DVD's. Samples are grouped with mathematical problems. This project also provides inputs for testing and checking if the installation is properly done to the knoppix-math. The project will be moved to a MediaWiki of knoppix-math after the icms2006. (Nobuki Takayama, Kobe University)

40. **MATLAB**

<http://www.mathworks.com>

License: Commercial

Matlab is a language for technical computing and an interactive environment.

41. **Mizar**

<http://www.mizar.org>

License:

Mizar project provides a database for mathematics (7000 definitions, 40000 theorems) as well as the mizar system.

42. **MPFR library for multiple precision floating point computation**

<http://www.mpfr.org>

License: LGPL

The MPFR library is a C library for multiple-precision floating-point computations with exact rounding (also called correct rounding). It is based on the GMP multiple-precision library. The main goal of MPFR is to provide a library for multiple-precision floating-point computation which is both efficient and has a well-defined semantics.

43. **Multi Parametric Toolbox**

<http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>

License: GPL

The Multi-Parametric Toolbox (MPT) is a free Matlab toolbox for design, analysis and deployment of optimal controllers for constrained linear, nonlinear and hybrid systems. Efficiency of the code is guaranteed by the extensive library of algorithms from the field of computational geometry and multi-parametric optimization.

The toolbox offers a broad spectrum of algorithms compiled in a user friendly and accessible format: starting from different performance objectives (linear, quadratic, minimum time) to the handling of systems with persistent additive and polytopic uncertainties. Users can add custom constraints, such as polytopic, contraction, or collision avoidance constraints, or create custom objective functions. Resulting optimal control laws can either be embedded into your applications in a form of a C code, or deployed to target platforms using Real Time Workshop.

44. **MuPad**

<http://www.mupad.de>

License: Commercial

MuPAD is a mathematical expert system mainly symbolic/algebraic computation and numerical calculations with arbitrary accuracy.

45. **MuPAD-Combinat**

<http://mupad-combinat.sourceforge.net>

License:

MuPAD-Combinat is an open-source algebraic combinatorics package for the computer algebra system MuPAD <http://www.mupad.de>. Its main purpose is to provide an extensible toolbox for computer exploration, and foster code sharing between researchers in this area. The core of the package is integrated in the official library of MuPAD since version 2.5.0.

46. **NZMATH**

<http://tnt.math.metro-u.ac.jp/nzmath/>

License: BSD

NZMATH is a number theory oriented calculation system based on the scripting language Python. It is currently providing the Python library package named `nzmath`, which contains modules for primality testings, factorization, polynomial, matrix, elliptic curves, etc. (MATSUI Tetsushi, Tokyo Metropolitan University)

47. **Octave**

<http://www.octave.org>

License: GPL

GNU Octave is a high-level language, primarily intended for numerical computations.

48. **Oorange**

<http://www.oorange.de>

License: GPL

Oorange is a development environment that was initially designed for experimental mathematics but has become a general Java programming tool. It's main feature is its interactive programming, also known as rapid prototyping. It also fits into component oriented development.

49. **OpenMath**

<http://www.openmath.org>

License:

OpenMath is an emerging standard for representing mathematical objects with their semantics, allowing them to be exchanged between computer programs, stored in databases, or published on the worldwide web.

50. **OpenXM**

<http://www.openxm.org>

License: BSD, GPL, FFL

OpenXM is an infrastructure for communications among mathematical software systems. The project has proposed protocols OpenXM RFC 100, 101, 102, 103, 104. The OpenXM package is a collection of software systems supporting OpenXM protocols. The current distribution contains `asir`, `sm1`, `Macaulay 2`, `PHCpack`, `gnuplot`, `polymake`, `cdd`, `ntl`, `pari`, supports for `Maple`, `Mathematica`, `OpenMath`, and some small sized systems.

51. **webOrigami**
<http://weborigami.score.cs.tsukuba.ac.jp/webOrigami/jsp/>
License:
Origami assistant on a web.
52. **ORMS**
<http://orms.mfo.de>
License:
The Oberwolfach References on Mathematical Software (ORMS) project is a web-interfaced collection of information and links on mathematical software, see <http://orms.mfo.de>.
It presents carefully selected software, including general purpose software systems, teaching software, and more specialized packages up to specific implementations on particular mathematical research problems. Each software package is presented by a short description of its mathematical features, information on basic properties like license type and distribution media are provided, and links to syntax examples, possible demo versions and manuals are given. The ORMS offers a choice of retrieval functions, for example, searching via browsing through a mathematical classification scheme, a structured key word search, and a full text search in the description of the software systems.
The success of this project will rely on the co-operation of experienced users from different areas of mathematical software. We therefore encourage discussion (at orms@mfo.de) and we will be grateful to contributions (at contrib-orms@mfo.de).
53. **Pari-GP**
<http://pari.math.u-bordeaux.fr>
License: GPL
The PARI system is a package which is capable of doing formal computations on recursive types at high speed. It is primarily aimed at number theorists, but is useful to anyone whose primary need is speed. The functionality of PARI is available through a sophisticated programmable calculator, named GP, which also implements many features of high level languages.
54. **PHCpack**
<http://www.math.uic.edu/~jan/download.html>
License: GPL, free software
PHCpack is a package for Polynomial Homotopy Continuation. Version 1 was archived by ACM TOMS as Algorithm 795. Currently it is a platform for “numerical algebraic geometry” providing algorithms developed jointly with Andrew Sommese and Charles Wampler. Contributions made by Anton Leykin, Yusong Wang, Ailing Zhao, and Yan Zhuang. (Jan Verschelde, UIC.)
55. **PHCmaple**
<http://www.math.uic.edu/~leykin/PHCmaple>
License: GPL
This Maple package provides a convenient interface to the functions of PHCpack, a collection of numerical algorithms for solving polynomial systems using polynomial homotopy continuation.

56. **polymake**
<http://www.math.tu-berlin.de/polymake/>
License: GPL
polymake is a modular, object-oriented tool for experimental discrete geometry. The main applications are dealing with polytopes and polyhedra, polyhedral surfaces, and finite simplicial complexes. It offers an unified interface to a wide variety of free software packages from the field, especially for visualisation. It can be used interactively as well as driven by perl scripts or C++ programs. (Ewgenij Gawrilow, Technische Universität Berlin, and Michael Joswig, Technische Universität Darmstadt)
57. **ProofPower**
<http://www.lemma-one.com/ProofPower/index/index.html>
License: GPL
ProofPower is a tool for specification and proof in Higher-Order Logic (HOL) and in the Z Notation, based on a re-engineering of Mike Gordon's original HOL system. Like other systems in the LCF tradition, it uses a powerful strongly-typed functional programming language (Standard ML) to ensure logical correctness by reducing all proof steps to primitive inferences rules and to provide a rich and extensible repertoire of automated derived inference rules and decision procedures. Its is used commercially for the verification of safety-critical avionics control systems. Libraries of discrete and continuous mathematics have been and continue to be developed to support these applications and for their intrinsic interest.
58. **QaoS - Querying Algebraic Objects System**
<http://www.math.tu-berlin.de/~kant/database.html>
License: BSD like
QaoS (Querying Algebraic Objects System) is a stand-alone solution for access to the KANT databases of algebraic and transcendental field extensions. QaoS transfers information via the hypertext transport protocol (HTTP). It can be accessed through a web interface and various computer algebra systems (GAP 4, KASH 2.56, KASH 3, Maple, and SAGE).
59. **R**
<http://www.r-project.org>
License: GPL
R is a system for statistical computing and graphics.
60. **Risa/Asir**
<http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir>
License: Other(FFL, BSD)
Risa/Asir is a computer algebra system. Here is a list of some commands: fctr (factorization), gr, nd_gr_trace (Groebner basis), primadec (primary ideal decomposition), af (factorization over algebraic numbers), ifplot (plot of implicit functions), ox_* (OpenXM communication functions), generic_bfct (b-function).
61. **SAGE: Software for Algebra and Geometry Experimentation**
<http://sage.scipy.org/sage>
License: GPL

The Python-based computer algebra system SAGE comes with the systems GAP, PARI, Singular. and provides interfaces KASH/KANT, Gnuplot, Octave, Magma, Mathematica, and Maple. It includes functions for basic algebraic geometry, elliptic curves over the rational numbers, modular forms, linear algebra and Z-modules, and noncommutative algebra.

62. **SARAG**

<http://perso.univ-rennes1.fr/marie-francoise.roy/bpr-posted1.html>

License: GPL

SARAG(Some Algorithms in Real Algebraic Geometry) is a software library that implements some algorithms in real algebraic geometry written in the free computer algebra system Maxima. SARAG has two main applications: extending the capabilities of Maxima and being part of the interactive version of the book “Algorithms in Real Algebraic Geometry” by S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, which can be now freely downloaded.

63. **sgpviz**

<http://www.gap-system.org/Packages/sgpviz.html>

License:

The GAP package *sgpviz* is a package designed to visualize finite semigroups through their \mathcal{D} -classes or Cayley graphs, as well as to make friendlier the usage of GAP when dealing with finite semigroups.

64. **Singular**

<http://www.singular.uni-kl.de>

License: GPL, others

SINGULAR is a Computer Algebra System for polynomial computations with emphasis on the special needs of commutative algebra, algebraic geometry, and singularity theory. SINGULAR’s main computational objects are ideals and modules over a large variety of rings, including local rings and non-commutative G-algebras (in the subsystem PLURAL). Large variety of algorithms, including those based on Gröbner and standard bases, have powerful implementations in SINGULAR.

65. **Strong Noether Position**

<http://www-calfor.lip6.fr/~hashemi/Noether>

License:

We introduce the notion of a homogeneous ideal in Strong Noether Position (SNP); a new definition for the notion of generic coordinates for some problems. This definition is simple to check, because one can test it for the initial ideal of the ideal with respect to the degree reverse lexicographic ordering. It is explicit, because we can provide an algorithm to decide whether a monomial ideal is in SNP or not. We propose some methods to compute the Castelnuovo-Mumford regularity of an ideal which one of them is more efficient than that of [Bermejo-Gimenez, 2005]. (Amir Hashemi)

66. **Surface Evolver**

<http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver/>

License:

The Surface Evolver is an interactive program for the study of surfaces shaped by surface tension and other energies, and subject to various con-

straints. A surface is implemented as a simplicial complex (a union of triangles) and is evolved toward minimal energy by a gradient descent method. The Evolver can handle arbitrary topology. Graphical output is available in several file formats.

67. **surfex**

<http://www.surfex.algebraicsurface.net>

License: Freeware

surfex is a tool for interactive high quality real algebraic surface visualization. It is mainly an intuitive interface which combines the strenghts of several visualization tools; at the moment, these include surf, javaview, and convert. One of the main features of surfex is the interactive visualization of families of algebraic varieties: The user can introduce parameters into some implicit equations and then play with these parameters via sliders. E.g., this allows one to visualize deformations of surface singularities.

All the pictures can easily be exported, either as an animation which shows the whole deformation process, or as a snapshot of a single variety. The user can specify the quality of the output which can range from very high quality for printed publications to lower quality for websites.

We also implemented a library for the computer algebra system Singular, called surfex.lib, which enhances the quality of the visualization of surfex using pre-computation of the singular locus etc.

68. **SYNAPS**

<http://www-sop.inria.fr/galaad/logiciels/synaps>

License: GPL

SYNAPS (SYmbolic Numeric APplications) is a C++ library devoted to symbolic and numeric computations. It provides data-structures for the manipulation of basic algebraic objects, such as vectors, matrices (dense, sparse, structured), univariate and multivariate polynomials. It contains solvers for univariate and multivariate polynomials, including generalized normal form or subdivision solvers, tools for the manipulatiiion of algebraic numbers, for the construction of resultants, ...

69. **TC**

<ftp://tnt.math.metro-u.ac.jp/pub/math-packs/tc/>

License: GPL

TC (Tiny C) is an interpreter of multi-precision C language suitable for floating-point calculations of several thousands digits which often appear in computational algebraic number theory. Furthermore TC ver.4, which is equipped with PARI library and turned TCP ver.1, provides frequently used PARI library functions by C-like functions which are easy to call from TC. (Takashi Fukuda)

70. **TeXmacs**

<http://www.texmacs.org>

License: GPL

GNU TeXmacs is a free wysiwyw editing platform for scientists.

71. Virtual Math Laboratories

<http://www.jreality.de>

License: GPL

Virtual Math Labs is a collection of educational and scientific java web start applications. The library of mathematical experiments shows topics from various areas, e.g. dynamical systems, polyhedral surfaces, calculus, and curves and surfaces.

About this document

This document, edited by Masayuki Noro and Nobuki Takayama, is distributed under the GNU Free Documentation License Version 1.2. June 27, 2006.

List of contributors of this document:

Ainhoa Berciano Alcaraz, Alfred Gerard Noel, Amir Hashemi, Anders Nedergaard Jensen, Anton Leykin, Bernard Mourrain, Chu-ching Huang, Colin Jones, Dongming Wang, Evgenij Gawrilow, Fabrizio Caruso, Francois Descouens, Fukuda Takashi, Gert Martin Greuel, Jan Verschelde, Jean B. Lasserre, John Abbott, John Harrison, Joris Van Deun, Klaus Ebbe Grue, MATSUI Tetsushi, Manuel Abellanas, Manuel Delgado, Marie-Francoise Roy, Markus Schmies, Masayoshi SEKIGUCHI, Masayuki Noro, Nobuki Takayama, Oliver Labs, Predrag Janicic, Rob Arthan, Sebastian Pauli, Sergey Lyalin, Stefan Becuwe, Viktor Levandovskyy, Xiaoshan Gao, Xin Li, Paul Libbrecht,

– ICMS2006 Video Archives –

1. [Plenary Lectures](#)
2. [Session 0](#). General, Andres Iglesias and Nobuki Takayama
3. [Session 1](#). New Developments on Computer Algebra Packages, Andres Iglesias, Tetsuo Ida
4. [Session 2](#). Interfacing Computer Algebra and Mathematical Visualization, Konrad Polthier
5. [Session 3](#). Computer Mathematics, Freek Weidijk, advisory organizer: Henk Barendregt
6. [Session 4](#). Software for Algebraic Geometry and Related Topics, Nobuki Takayama, advisory organizer: Gert Martin Greuel
7. [Session 5](#). Number Theoretical Software, Ken Nakamura, Michael Pohst
8. [Session 6](#). Methods in Computational Number Theory, David Sevilla, Jaime Gutierrez
9. [Session 7](#). Free Software for Computer Algebra, Joris Van der Hoeven
10. [Session 8](#). Software for Optimization and Geometric Computation, Komei Fukuda, Michael Joswig
11. [Session 9](#). Methods and software for computing mathematical functions, Amparo Gil, Javier Segura
12. [Session 10](#). Access to Mathematics on the Web, Paul Libbrecht

To view streaming video, you need QuickTime player 7 or later [Free download of QuickTime player](#) . Note: version 6 will not work.

超幾何方程式研究会

【超幾何方程式研究会】 を下記日程で開きます。

みなさまのお越しをお待ちしております。

11月4日(木曜日) 13:30 -- 17:00 : 場所 神戸学生青年センター
 11月5日(金曜日) 9:30 -- 17:00 : 場所 神戸学生青年センター
 11月6日(土曜日) 9:15 -- 12:45 : 場所 神戸大学自然科学研究科 3号棟
 6階 野海プロジェクト内 620号室

○ 場所について

神戸学生青年センター

は、阪急六甲駅の北側にあります。
 神戸大学より徒歩 10 分です。

神戸大学自然科学研究科 3号棟 の位置

なお会場の収容能力は最大 25 名程度ですので、参加される方はまえもって
 高山までメール下さい (@math.kobe-u.ac.jp の takayama です)。

○ 時間割 (暫定版)

11/4 (木曜日) 神戸学生青年センター (<http://www.ksyc.jp>)

13:30 -- 14:30 : 高山 (神戸)

超幾何方程式の無限遠点での解析と解析的グレブナ扇

14:45 -- 15:45 : 松本 (北海道)

白頭絡み目と Theta 関数

16:00 -- 16:30 : 藤堂秀平 (神戸, D1)

genus0 の代数曲線の parametrization アルゴリズムと実装

16:30 -- 17:00 : 中山洋将 (神戸, D1)

Mora の割り算アルゴリズムと local-b 関数の計算アルゴリズム

11/5 (金曜日) 神戸学生青年センター (<http://www.ksyc.jp>)

9:30 -- 10:30 : Vidunas Raimundas (九州, 研),

On computaion of Belyi maps (highly ramifies coverings
 of the projective line)

10:45 -- 11:45 : 鈴木 (神戸, 研)

シュレジンガー系の古典解とその退化構造

13:00 -- 14:00 : 岩崎 (九州)

K 3 曲面上の複素力学系 (C. T. McMullen の仕事の紹介)

14:15 -- 15:15 : 千葉康生 (東京, 研)

分数階の擬微分作用素を用いた双曲型方程式の境界値問題

15:30 -- 16:30 : 原岡 (熊本)

TBA (高山注: 大学院生もなにか話すかも)

16:45 -- : 未定

夕方からは 野海プロジェクト内の部屋も使えるようになると思います。

11/6 (土曜日) 神戸大学自然科学研究科 3号棟

6階 野海プロジェクト内 620号室

[パスワードないと土曜日は入れません。高山携帯へ連絡を]

9:15 -- 10:15 : 松井優 (東京, D1)

Grassmann多様体上の構成可能関数のRadon変換の反転公式について

10:30 -- 11:30 : 三町(東京工業),
共鳴条件下での捻れホモロジー
--- 局所有限ホモロジーと有限ホモロジーの比較

11:45 -- 12:45 : 斎藤(北海道),
アフィントーリック多様体上の微分作用素環とA-超幾何系

午後は自由. 部屋は使えると思います.

\$Id: hg2004.html,v 1.3 2004/11/04 00:59:28 taka Exp \$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆
 ☆ 2006年1月6日 (Fri), 1月7日 (Sat) ☆
 ☆ “超幾何方程式研究会” (1/6 は朝 9:00 から) ☆
 ☆ 神戸大学 理学部 B314 教室 ☆
 ☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

本年度の超幾何方程式研究会は超幾何関数, 超幾何方程式, 超幾何積分
 やそれに関係ある話題をひろく扱う予定です.
 超幾何関連ソフトウェア, ポスタ, ホームページ, 模型の展示もあります

◆ 時間割りについて:

一日 8 講演まで. 2+2, 2+2. 原則 45 分.
 神戸大昔の時間割り準拠
 9:00--10:30
 10:50--12:20
 13:30--15:00
 15:20--16:50

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆ 1/6 (Fri) 9:00 開始です ☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

- 1.1 松本圭司 (北大)
「 ζ 関数の周期関係式」
- 1.2. Raimundas Vidunas (九大)
「Zeilberger's algorithm for non-terminating hypergeometric series.」
- 1.3. 笹野 祐輔 (神戸大, 研究生)
「Higher order Painlevé equations of type $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)}$ and $D_1^{(1)}$ 」
- 1.4. 加藤 満生 (琉球大)
「 ${}_3F_2$ の2, 3次又は高次変換とSchwarz map」
- 1.5 斎藤睦 (北大)
「アフィントーリック多様体上の微分作用素環の理論の
A-超幾何系への応用に向けて」
- 1.6 野呂正行 (神戸大)
「Risa/Asirの非可換代数用新機能---気軽に計算してみませんか?」
- 1.7 金井政宏 (東京大学, 研究支援員)
「交通流に現れる超幾何関数」

◆◆◆◆◆◆◆◆ 1/7 (Sat) 9:00 開始です ◆◆◆◆◆◆◆◆

- 2.1. 金子 譲一 (琉球大)
「Selbergのある極値問題について」
- 2.2. 上野陽一 (熊本大, 学生)
「Appell F_4 のrigidityについて」
- 2.3. 増田哲 (神戸大)
「Painlevé 系の特解と行列式」
- 2.4 上原 崇人 (九大院数理学府, 学生)
「Periodic solutions to the sixth Painlevé equation and dynamical systems on cubic surfaces.」
- 2.5 福山克司 (神戸大)
「乱数と数値積分」

○2.6 中山洋将 (神戸大, 学生)

Interactive Computer Algebra System の試み
--- Interactive Tangent cone アルゴリズム と
Interactive Buchberger アルゴリズム

☆☆☆☆☆☆ 1/7 (Sat) 15:00 で終了. 長くても 16:00 まで. ☆☆☆☆☆

△△△超幾何関連ソフトウェア, ポスタ, ホームページ, 模型の展示もあります△△△

- (1) 山口君のラプラシアン固有関数(Bessel function等)による画像圧縮.
 - (2) 小原君の超幾何微分差分用パッケージ.
 - (3) 中山君の interactive CA.
 - (4) Bahloul-高山-Touda の local tropical variety パッケージ.
 - (5) その他, 交渉中
-

-----AD-----

┌───┐ ■ 超幾何早春学校, at 北大(札幌) ───┐
├───┤ 一流研究者による超幾何関数の集中講義. ───┤
├───┤ 大学院生への旅費サポート. ───┤
└───┘ ───┘

< 詳しくはこちら → <http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/060306/index.html> >

-----AD-----

超幾何方程式研究会 2007 (プログラム 2006.12.19 版)

会場: 神戸大学 理学部B棟 314 教室 (3.14 教室 と覚えて下さい)
 問い合わせ先: 高山信毅 (takayama@math.kobe-u.ac.jp)

☆ 1月11日(木曜日)

1:20—2:20

ガウス超幾何方程式の双曲シュバルツ写像の燕尾特異点について.
 佐々木武 (神戸大学)

2:40—3:40

有限鏡映群をモノドロミー群にもつ3階の微分方程式.
 加藤満生 (琉球大学)

4:00—5:00

複素射影直線の3次巡回分岐被覆の周期.
 服部良平 (北海道大学 M2)

☆ 1月12日(金曜日)

9:20—10:20

ガルニエ系の相空間の合流.
 高野恭一, 田原伸彦 (神戸大学)

10:40—11:40

位相的ラドン変換とその応用について
 松井優(東京大学), 竹内潔(筑波大学),

1:20—2:20

Connection matrices associated with a Selberg type integral and the Racah polynomials (or q 6-
 三町勝久(東京工業大学)

2:40—3:40

冪が整数でも通用するtwisted (co)homology理論
 伊藤公毅(京都大学)

4:00—5:00

非斉次な単独常微分方程式の形式冪級数の空間での可解条件
 田島慎一(新潟大学)

☆ 1月13日(土曜日)

9:20—10:20

次元の異なる超幾何級数に関する変換公式
 梶原 康史(大阪大学)

10:30—11:30

Affine Schwarz map,
 西坂龍哉, 小林亮一, 新里祥司(九州大学, M)

11:40—12:40

未定 (会場で相談)

午後は自由 (会場も利用できます)

A-超幾何微分差分方程式の 解空間の次元公式

小原功任 金沢大学理学部計算科学科
高山信毅 神戸大学理学部数学科

1 はじめに

行列 $A = (a_{ij}) \in M(d, n, \mathbf{Z})$ をひとつとる. 行列 A の列ベクトルたちは \mathbf{Z}^d を張るものとし, A の列ベクトルには零ベクトルは含まれないと仮定する. また, 差分作用素 $S_i : f(s_i) \mapsto f(s_i - 1)$ を考える.

定義 1. 微分差分方程式系 H_A

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \partial_j - s_i \right) \bullet f = 0, \quad (i = 1, \dots, d) \quad (1.1)$$

$$\left(\partial_j - \prod_{i=1}^d S_i^{a_{ij}} \right) \bullet f = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

を A -超幾何微分差分方程式と呼ぶ.

ここで, 交換関係

$$\begin{aligned} S_i S_j &= S_j S_i, & x_i S_j &= S_j x_i, & s_i S_j &= S_j s_i + \delta_{ij} S_j \\ \partial_i \partial_j &= \partial_j \partial_i, & s_i \partial_j &= \partial_j s_i, & x_i \partial_j &= \partial_j x_i - \delta_{ij} \end{aligned}$$

をもつ, 有理関数係数の微分差分作用素環

$$D = \mathbf{C}(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_d) \langle \partial_1, \dots, \partial_n, S_1, \dots, S_d, S_1^{-1}, \dots, S_d^{-1} \rangle$$

を考え, H_A を D の左イデアルとみなす.

定義 2. 微分差分作用素環 D の左イデアル I のランクを次で定義する.

$$\text{rank}(I) = \dim_{\mathbb{C}(x,s)} D/I$$

ただし, D/I を $\mathbb{C}(x, s)$ 上のベクトル空間と考える.

定義 3 (正規化体積). 行列 A の列ベクトル a_i を \mathbb{R}^d の点とみなし, $\{0\} \cup \{a_i\}$ の凸包のユークリッド体積を $m(A)$ で表すとき,

$$\text{vol}(A) = d!m(A)$$

を行列 A の正規化体積と呼ぶ.

定理 1. 行列 A が生成条件を満たすとき, H_A のランクは A の正規化体積 $\text{vol}(A)$ と一致する.

行列 A の i 番目の列ベクトルを a_i とし, 次のような定積分を考える.

$$F(\beta, x) = \int_C \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i t^{a_i}\right) t^{-\beta-1} dt, \quad t = (t_1, \dots, t_d)$$

このとき, $F(\beta; x)$ は「形式的に」 \mathcal{A} -超幾何微分方程式を満たす. また, $F(s; x)$ は「形式的に」 \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式を満たす. ここで「形式的に」と書いたのは, サイクル C の取り方が一般的には分かっていないからである. この積分表示を介して, \mathcal{A} -超幾何微分方程式と, \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式は関連している.

\mathcal{A} -超幾何微分方程式のランクをはじめてシステムティックに研究したのは, Gel'fand, Zelevinsky, Kapranov である. 我々の定理と全く同じ条件のもとで, 1980 年代の終りに, トーリックイデアル I_A が Cohen-Macaulay ならば, \mathcal{A} -超幾何微分方程式 $H_A(\beta)$ のランク $\text{rank}(H_A(\beta))$ は A の正規化体積に等しいことを示した. その後, 多くの人が正規化体積に等しくなる条件を研究した. (詳しくは [10] およびその参考文献, 最近の進展については [5] 参照)

我々の定理の証明は, これらの定理および級数解の一意収束性と斎藤睦氏の隣接関係式に関する結果を用いている. 我々は定理の形を予想するために, 計算代数システム Risa/Asir 上で計算機実験を行った. これらの実験に用いたプログラムは yang パッケージとして公開されている ([6], [7]).

また, [11] の p.32, Algorithm 4.5 より, H_A よりトーリックイデアル I_A が導出されることにも注意したい.

例 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式のランクは 3 であり, さらにグレブナ基底の計算から, $F = {}^t(f, S_1 \bullet f, S_2 \bullet f)$ に対して, 差分パツフィアン

$$S_1 F = A_1(x, s)F, \quad S_2 F = A_2(x, s)F$$

が具体的に得られる. ここで, $A_1(x, s), A_2(x, s)$ は有理式を要素とする行列. A_1, A_2 は複雑なので, ここには載せられないが, 特に $x = (1, 1, 0, 1)$ では

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3(6s_1-2s_2-3)(3s_1-s_2)}{31} & \frac{85s_1-31s_2-58}{31} & \frac{2((3s_1-s_2)^2-1)}{31} \\ \frac{3s_1-s_2}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3s_1-s_2}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{31s_1-13s_2}{4(3s_1-s_2+2)} & \frac{31}{4(3s_1-s_2+2)} & \frac{3(3s_1-s_2+1)}{2(3s_1-s_2+2)} \end{pmatrix}$$

となる.

2 定理の証明: 代数的部分

この節では定理 1 の証明の前半部分, つまり

$$\text{rank}(\mathbf{H}_A) \leq \text{vol}(A) \quad (2.1)$$

の証明を与える.

証明の本質的部分は, 斎藤睦により証明された \mathcal{A} -超幾何方程式の contiguity relation の存在定理である [8]. この contiguity relation を復習しよう. 超幾何方程式の contiguity relation は一般に複雑であるが, \mathcal{A} -超幾何方程式系の contiguity relation はパラメータを減らす方向へは単純である: $\Phi(\beta; x)$ を $H_A(\beta)$ の解とするとき

$$\partial_i \bullet \Phi(\beta; x) \text{ は } H_A(\beta - a_i) \text{ の解} \quad (2.2)$$

なる関係がなりたつ. 証明は [10, Theorem 4.5.10, p.184] をみよ.

さて問題は ∂_i の逆作用素 C の存在の証明と導出である. つまり

$$C \bullet \Phi(\beta - a_i; x) \text{ は } H_A(\beta) \text{ の解}$$

となる C の存在証明と導出方法が問題である.

斎藤睦は A が normal という条件をみたすとき C が存在するための必要十分条件を与えた [8]. C の問題についての一番一般的な解答は, [10] の p.174 から p.186 に書いてある.

定理 2 ([10, (4.43)]).

$$(D[s] \cdot H_A(s) + D[s] \cdot \partial_i) \cap K[s] \neq \phi$$

である. とくに ∂_i の $\text{mod } H_A(s)$ での逆は $D(s)$ において存在する. ここで $D = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$, $D[s] = D[s_1, \dots, s_d]$, $D(s)$ は s の有理式と x の多項式を係数とする微分作用素のなす環.

$R = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)\langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とおく. R は rational function 係数の微分作用素環である. Adolphson の定理 [1] または [10, (4.3)] より, β をある代数方程式系 (P) の零点集合の外にある複素数のベクトルに選ぶと,

$$\dim_{\mathbb{C}(x)} R/(R \cdot H_A(\beta)) = \text{vol}(A)$$

が成立する. さて s と x の rational function を係数とする微分作用素環 $R(s) = \mathbb{C}(s, x_1, \dots, x_n)\langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ を考え,

$$\dim_{\mathbb{C}(x,s)} R(s)/(R(s) \cdot H_A(s))$$

を計算しよう. ここで β_1, \dots, β_d は不定元 s_1, \dots, s_d に置き換えてある. この次元を計算するには $H_A(s)$ のグレブナ基底 $G(s)$ を $R(s)$ で計算すればよい. $R(s)$ での計算では x, s の有理式は係数扱いなので Buchberger アルゴリズムの過程で x, s の多項式でわったり掛けたりするはずである. たとえば $f - \frac{1}{c(x,s)} \ell g$, $\ell \in D[s]$ みたいな計算. 計算は有限の繰り返しで終了する. したがって, これらの係数の s を数に置き換えたとき上の $c(x, s)$ などが恒等的に消えないとか, 計算途中で主係数が消えない条件は, s についての有限個の代数方程式系 (Q) でかける. したがって β がこの代数方程式系の解でなければ, グレブナ基底 $G(s)$ の s を β で置き換えたものは, R での $H_A(\beta)$ のグレブナ基底となる. なぜならば $H_A(\beta)$ のグレブナ基底の導出過程と $H_A(s)$ のグレブナ基底 $G(s)$ の導出過程は全く同じになるからである. なお s が (Q) の解のときは, 掛ける係数が消えたり, 分母が 0 になったり, さらにグレブナ基底の係数が消えてしまうかも知れないわけで, グレブナ基底の導出過程は一般的には異なる.

代数方程式系 (P) と (Q) の零点集合の外にある点 β を考えるとグレブナ基底 $G(\beta)$ に関する標準単項式の個数は $\text{vol}(A)$ のはずである. 上の考察よりこれはもちろん $G(s)$ に関する標準単項式の個数に等しい. したがって,

$$\dim_{\mathbb{C}(x,s)} R(s)/R(s) \cdot H_A(s) = \text{vol}(A)$$

である.

以上の準備のもとに (2.1) を証明しよう. 定理 2 を用いると, ∂_i の逆作用素である contiguity relation C_i が存在する. よって $\partial_i - S^{a_i}$, $C_i - S^{-a_i}$ 達は H_A の元である. ($C_i - S^{-a_i} = -S^{-a_i} C_i \cdot (\partial_i - S^{a_i})$ だから). ここで a_i は行列 A の i 番目のベクトルをあらわす. つまり, S^{a_i} は $\prod_{k=1}^d S_k^{a_{ki}}$, S^{-a_i} は $\prod_{k=1}^d S_k^{-a_{ki}}$. さて生成条件を用いると,

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i = e_k \quad e_k \text{ は } k \text{ 番目の単位ベクトル}$$

となる整数 p_i 達が存在する. よって $S_k = \prod S^{p_i a_i}$ と書ける. $p_i > 0$ なら $\partial_i^{p_i}$ は $S^{p_i a_i}$ に $\text{mod } H_A(s)$ で同値, $p_i < 0$ なら $C_i^{-p_i}$ は $S^{p_i a_i}$ に $\text{mod } H_A(s)$ で同値. したがって結局, H_A の順序 $S_1, \dots, S_d > S_1^{-1}, \dots, S_d^{-1} > \partial_1, \dots, \partial_n$ でのグレブナ基底 $E(s)$ は, $G(s)$, $\tilde{C}_k - S_k$ を含むとしてよい. ここで \tilde{C}_k が微分作用素であることに注意すると, $E(s)$ の標準多項式の集合は $G(s)$ の標準単項式の集合に含まれる. よって (2.1) がいえた.

3 定理の証明: 解析的部分

$$\text{rank}(H_A) \geq \text{vol}(A) \tag{3.1}$$

の証明には解析を使う. Gel'fand-Zelevinski-Kapranov は, 同次な A の場合に $H_A(\beta)$ の一次独立な $m = \text{vol}(A)$ 個の級数解を regular triangulation で構成する方法を与えた [4]. もちろん β は generic でないと構成できない. この解を $f_1(\beta; x), \dots, f_m(\beta; x)$ と書く.

命題 1. この級数は x と β についてある開集合の上で収束する.

[4] には証明のスケッチしか書いてないので 4 節および B 節に詳しい証明を与える. 証明の細部の議論は不確定特異点の場合の議論 (これは [4] ではやっていない) にも必要となる.

さてこの命題により $f_1(s; x), \dots, f_m(s; x)$ (の解析接続) は超幾何微分差分方程式 H_A の解析的な解であることがわかる. さて $\text{rank}(\mathbf{H}_A) < \text{vol}(A)$ と仮定しよう. このとき前の定理の順序

$$S_1, \dots, S_d > S_1^{-1}, \dots, S_d^{-1} > \partial_1, \dots, \partial_n$$

において H_A のグレブナ基底の標準単項式は微分のみを含み仮定よりその個数は $\text{vol}(A)$ より真に小さい. つまり H_A の微分差分作用素環におけるグレブナ基底の標準単項式の集合 T は $H_A(s)$ の $D(s)$ におけるグレブナ基底の標準単項式の集合 T' の真部分集合である. 消えた (減った分の) 標準単項式を ∂^γ とおく. このとき ∂^γ は標準単項式 $\{\partial^\alpha \mid \alpha \in T\}$ の一次結合でかける. ここで $|T| < \text{vol}(A)$. さてこの一次結合の表示式を

$$\partial^\gamma \equiv \sum_{\alpha \in T} c_\alpha \partial^\alpha \quad \text{mod } \mathbf{H}_A$$

と書こう. ここで c_α は x, s の有理式である. $f_1(s; x), \dots, f_m(s; x)$ は超幾何微分差分方程式 H_A の解なので,

$$\partial^\gamma \cdot f_i = \sum_{\alpha \in T} c_\alpha \partial^\alpha \cdot f_i$$

である. ここで $G(s)$ の標準単項式の集合

$$\{\partial^\delta \mid \delta \in T'\}$$

($|T'| = \text{vol}(A)$) を考える. $f_1(\beta; x), \dots, f_m(\beta; x)$ は $H_A(\beta)$ の一次独立解だったので, T' に関する Wronski 行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(s; x) & \cdots & f_m(\beta; x) \\ \partial^\delta f_1(s; x) & \cdots & \partial^\delta f_m(\beta; x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

は s に generic な数を代入したとき恒等的に 0 ではない. 一方 T' は ∂^γ を含み,

$$\partial^\gamma \cdot f_i = \sum_{\alpha \in T} c_\alpha \partial^\alpha \cdot f_i$$

を上行列式に代入すると, 上の Wronski 行列式は恒等的に 0 となる. これは矛盾である. 以上で (3.1) の証明が終了した.

A が同次で無い場合も我々が 5 節で構成する収束級数を使うと同様に (3.1) が証明できる.

4 \mathcal{A} -超幾何級数の収束性 (確定特異点の場合)

命題 1 はつまり, A の正則三角形分割 Δ があたえられたとき, Δ の各単体 τ_i に対して決まる形式級数解 $f_{\tau_i}(s; x)$ が収束することを主張している.

この節では行列 A が同次条件を満たすと仮定する. すなわち A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & * \end{pmatrix}$$

という形を持つとする.

さて, τ を $\{1, 2, \dots, n\}$ の d -単体とする. $\lambda \in \mathbb{C}^n$ が任意の $j \notin \tau$ に対して $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ であるとき, λ は τ に対して admissible であるという.

命題 2. $A\lambda = s$ かつ, d -単体 τ に対して admissible な λ をとったとき, (τ, λ) で決まる \mathcal{A} -超幾何級数

$$\phi_\tau(\lambda; x) = \sum_{l \in L} \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)}$$

は H_A の形式的な解になる. ここで $L = \text{Ker}(A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^d)$.

Proof. まず, (1.1) を満たすことを示す. $A\lambda = s$ および $Al = 0$ より, $\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j = s_j$ かつ $\sum_{j=1}^n a_{ij}l_j = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\partial_j \cdot \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda_j + l_j) \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} \\ &= s_j \cdot \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} \end{aligned}$$

よって $\phi_\tau(\lambda; x)$ が (1.1) を満たすことは明らか.

次に, (1.2) を満たすことを示す. $A\lambda = s$ より,

$$\left(\prod_{i=1}^d S_i^{a_{ij}} \right) \cdot f(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_n)$$

に注意して,

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^d S_i^{a_{ij}} \right) \cdot \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} &= \left(\prod_{i=1}^d S_i^{a_{ij}} \right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{x_k^{\lambda_k+l_k}}{\Gamma(\lambda_k+l_k+1)} \\
&= \frac{(\lambda_j+l_j)x_j^{-1}x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} \\
&= \partial_j \cdot \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)}
\end{aligned}$$

よって $\phi_\tau(\lambda; x)$ が (1.2) を満たすことは明らか. \square

次に, 行列 A に対し, $\text{Ker}(A : \mathbf{Q}^n \rightarrow \mathbf{Q}^d)$ の基底 (列ベクトル) を並べたもので, 次のように正規化したものを B と置こう.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & * \end{pmatrix} \in M(n, n-d, \mathbf{Q})$$

この列ベクトルを $b^{(1)}, \dots, b^{(n-d)}$ と書くことにする. $b^{(i)}$ の第 j 成分を b_{ij} と書く. A の第一行から

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0$$

が成り立つ.

$L' = \{(k_1, \dots, k_{n-d}) \in \mathbf{Z}^{n-d} \mid \sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)} \in \mathbf{Z}^n\}$ とすると, L' は \mathbf{Z}^{n-d} の \mathbf{Z} -部分加群であり, $L = \{\sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)} \mid k \in L'\}$ である.

つまり L は L' でパラメトライズできる.

添字を入れ替えても一般性を失わないので, $\tau = \{n-d+1, \dots, n\}$ とすれば, A -超幾何級数は

$$\phi_\tau(\lambda; x) = \sum_{l \in L} \frac{x^{\lambda+l}}{\Gamma(\lambda+l+1)} = \sum_{k \in L'} \frac{x^{\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)}}}{\Gamma(\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)} + 1)}$$

となる. B の形から

$$\lambda_j + \sum_{i=1}^{n-d} k_i b_{ij} + 1 = \lambda_j + k_j + 1 \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, \dots, n-d)$$

が成り立つ。また, $1/\Gamma(0) = 1/\Gamma(-1) = 1/\Gamma(-2) = \dots = 0$ であるので,

$$\phi_\tau(\lambda; x) = \sum_{\substack{k \in L' \\ \lambda_j + k_j + 1 \in \mathbf{Z}_{>0} \\ (j=1, \dots, n-d)}} \frac{x^{\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)}}}{\Gamma(\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)} + 1)}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} k'_j &= \lambda_j + k_j, & (j = 1, \dots, n-d) \\ \lambda' &= \lambda - \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i b^{(i)} \\ \hat{\lambda} &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \end{aligned}$$

と置くと,

$$\sum_{i=1}^{n-d} k_i b^{(i)} = - \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i b^{(i)} + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \phi_\tau(\lambda; x) &= \sum_{\substack{k' \in L' + \hat{\lambda} \\ k' \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-d}}} \frac{x^{\lambda - \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i b^{(i)}} \cdot x^{\sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)}}}{\Gamma(\lambda - \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i b^{(i)} + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} + 1)} \\ &= x^{\lambda'} \sum_{\substack{k' \in L' + \hat{\lambda} \\ k' \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-d}}} \frac{(x^{b^{(1)}})^{k'_1} \dots (x^{b^{(n-d)}})^{k'_{n-d}}}{\Gamma(\lambda' + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} + 1)} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$k' \in L' + \hat{\lambda} \iff \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} \in \mathbf{Z}^n$$

であるから, Appendix 定理 4 より, この級数は

$$|x^{b^{(1)}}|, \dots, |x^{b^{(n-d)}}| < r \quad (4.1)$$

で絶対収束する。

さて $r < 1$ としてもよいから, (4.1) の \log をとると,

$$b^{(k)} \cdot (\log |x_1|, \dots, \log |x_n|) < \log |r| < 0 \quad \forall k \quad (4.2)$$

が得られる.

単体 τ と r で決まる集合 $C(A, \tau, r)$ を次で定義する.

$$C(A, \tau, r) = \left\{ \psi \in \mathbf{R}^n \mid \exists \varphi \in \mathbf{R}^d, \psi_i - (\varphi, a_i) \begin{cases} > -\log |r|, & i \notin \tau, \\ = 0, & i \in \tau, \end{cases} \right\}$$

すると, 条件 (4.2) と $(-\log |x_1|, \dots, -\log |x_n|) \in C(A, \tau, r)$ が同値であることが分かる. (証明は [3] section 4.)

いま Δ を A の regular triangulation とすると,

$$\bigcap_{\tau \in \Delta} C(A, \tau, r)$$

は空でない open set.

よって共通の収束領域が存在する.

5 \mathcal{A} -超幾何級数の収束性 (不確定特異点の場合)

次に $A = (a_{ij})_{i,1,\dots,d,j=1,\dots,n} \in M(d, n, \mathbf{Z})$ が同次条件を満たさない場合を考える. このとき, A の列ベクトルを a_1, \dots, a_n と表し, 各 a_i は零ベクトルでないとしてよい.

証明には, I_A の同次化の手法を用いる. すなわち行列 A に対して, 同次条件を満たす新しい行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ & & \cdots & & 0 \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dn} & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. \tilde{A} の列ベクトルを \tilde{a}_i で表す.

方向ベクトルを $\tilde{w} = (1, \dots, 1, 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ と置こう. Toric variety $I_{\tilde{A}}$ の small Gröbner fan は polyhedral fan であるので, 次の補題が成り立つ.

補題 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\tilde{v} \in \mathbf{R}^{n+1}$ が存在して, $\tilde{w}(\varepsilon) := \tilde{w} + \varepsilon \tilde{v}$ がある最大次元の Gröbner fan の内部に入るようにできる. 特に $\tilde{v}_{n+1} = 0$ としてよい.

Proof. $\tilde{v}_{n+1} = 0$. としてよいことを示そう.

任意の t と任意の重みベクトル \tilde{w} に対して,

$$\begin{aligned}\text{ord}_{\tilde{w}}(x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i \alpha_i \\ \text{ord}_{\tilde{w}+t(1,\dots,1)}(x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i \alpha_i + t \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\end{aligned}$$

であるから, 同次式 f に対して,

$$\text{in}_{\tilde{w}}(f) = \text{in}_{\tilde{w}+t(1,\dots,1)}(f) \quad (5.1)$$

である. I を $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ の同次イデアル, I の Gröbner fan を $\bar{\mathcal{E}}(I)$ とする. $\bar{\mathcal{E}}(I)$ はいろんな次元の \mathbb{R}^{n+1} の closed set の集合であり, polyhedral fan の公理を満たす (see [Ziegler]). さて, $\bar{C} \in \bar{\mathcal{E}}(I)$, $\dim C \leq n$ を考える. このとき

$$\bar{C} \not\subseteq \{\tilde{w} \mid \tilde{w}_{n+1} = 0\} \quad (5.2)$$

となる. 背理法で示そう. $\tilde{w} \in C$ をとると, $\tilde{w} = (*, \dots, *, 0)$ であるから,

$$C = \{\tilde{w}' \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{in}_{\tilde{w}}(I) = \text{in}_{\tilde{w}'}(I)\} \quad (5.3)$$

である. G を $\langle \tilde{w} \rangle$ についての reduced Gröbner base としよう. G の要素は同次式. [11] の p.XX より,

$$C = \{\tilde{w}' \mid \text{in}_{\tilde{w}'}(g) = \text{in}_{\tilde{w}}(g) \text{ for all } g \in G\}.$$

さて, (5.1) より,

$$\text{in}_{\tilde{w}}(g) = \text{in}_{\tilde{w}+t(1,\dots,1)}(g)$$

であるから, (5.3) より $\tilde{w} + t(1, \dots, 1) \in C$ となるが, $t \neq 0$ とすると, $\tilde{w} + t(1, \dots, 1) \notin \{\tilde{w} \mid \tilde{w}_{n+1} = 0\}$ なので矛盾する.

したがって, (5.2) より $\bar{\mathcal{E}}(I)$ を $\tilde{w}_{n+1} = 0$ で切ると, 最大次元の cone は n 次元の cone になる. 特に最大次元の cone の内点で $\tilde{w}_{n+1} = 0$ となる点が存在する. \square

また [11] p.71, Proposition 8.15 より $\tilde{w}(\varepsilon)$ は secondary polytope の内点であるから, $\tilde{w}(\varepsilon)$ たちは \tilde{A} の同一の regular triangulation Δ を誘導する.

前小節と同じように $\tau \in \Delta$ に対して $b^{(i)}$ を定義する. また, \tilde{a}_{n+1} の weight が一番悪いことから, 常に $n+1 \in \tau$ であることに注意すると,

$\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ の添字を適当に入れ替えて, $\tau = \{n-d+1, \dots, n+1\}$ としても一般性を失わない.

さて [10] Theorem 3.4.2 より

$$\tilde{w}(\varepsilon) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} + \lambda \right) \geq \tilde{w}(\varepsilon) \cdot \lambda \quad \forall k' \in L' \cap S.$$

ここで, S は Γ 因子の分母に $\mathbf{Z}_{\leq 0}$ が現れないような集合である.

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えて,

$$\tilde{w} \cdot \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} \geq 0 \quad \forall k' \in L' \cap S.$$

また, 補題 3 より, $\tilde{w}(\varepsilon) \in C(\tilde{A}, \tau)$ なので,

$$\tilde{w}(\varepsilon) \cdot b^{(i)} \geq 0$$

同様に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えて,

$$\tilde{w} \cdot b^{(i)} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \geq 0$$

\tilde{A} の形から, $\sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} = 0$ であるから, $b_{i,n+1} \leq 0$ ($\forall i$) がいえる.

$k'_1 \geq -\lambda_1, \dots, k'_{n-d} \geq -\lambda_{n-d}$ なので,

$$\sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{i,n+1} \leq -\sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i b_{i,n+1}$$

である. 右辺が正数であることに注意. よって, Pochhammer symbol を用いると, $\Gamma(\lambda_{n+1} - m) = \Gamma(\lambda_{n+1})(-\lambda_{n+1} + 1; m)^{-1}(-1)^m$ であるから,

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(\lambda_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{i,n+1} + 1) \right| &= |\Gamma(\lambda_{n+1} + 1)| \cdot \left| \left(-\lambda_{n+1}; -\sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{i,n+1} \right) \right|^{-1} \\ &\leq c' |\Gamma(\lambda_{n+1} + 1)| \cdot \left| \left(-\lambda_{n+1}; -\sum_{i=1}^{n-d} \lambda'_i b_{i,n+1} \right) \right|^{-1} \\ &= c \end{aligned} \tag{5.4}$$

と Γ -因子が評価できる.

さて, $\tilde{s} = (s_0, s_1, \dots, s_d)$ とし, $\tilde{D} = \mathbf{C}(\tilde{s}, \tilde{x}) \langle \partial_1, \dots, \partial_{n+1}, S_0^{\pm 1}, \dots, S_d^{\pm 1} \rangle$ と置こう. $H_{\tilde{A}}$ が \tilde{D} の左イデアルであることに注意する.

$\tilde{A}\tilde{\lambda} = \tilde{s}$ を満たす $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ をとり, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とする.

\tilde{A} -超幾何方程式の解

$$\tilde{\phi}_{\tilde{\lambda}}(\tilde{x}) = \sum_{k' \in L' \cap S} \frac{\tilde{x}^{\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)}}}{\Gamma(\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} + 1)}$$

と, 級数

$$\phi_{\lambda}(x) = \sum_{k' \in L' \cap S} \frac{\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{ij}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\lambda_j + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{ij} + 1)}$$

を考える. ($\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.)

定義 4. $\phi_{\lambda}(x)$ を $\tilde{\phi}_{\tilde{\lambda}}(\tilde{x})$ の *dehomogenization* とよぶ.

命題 3. *dehomogenize* した級数 $\phi_{\lambda}(x)$ は超幾何微分差分方程式を満たし, $H_A(\beta)$ の収束解として一次独立である.

Proof. まず, $A\lambda = s$ となることから, 超幾何微分差分方程式 H_A の形式解となることは明らかである.

次に一次独立であることを示そう.

weight vector $\tilde{w}(\varepsilon) = (1, \dots, 1, 0) + \varepsilon v \in \mathbf{R}^{n+1}$ は $(1, \dots, 1, 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ の近傍にあって, $I_{\tilde{A}}$ のグレブナファンの最大次元錐の内点に入っているものとする.

[10] p.119 より, $\text{in}_{(1, \dots, 1, 0)} I_{\tilde{A}}$ の最小生成元は ∂_{n+1} を含まない.

よって,

$$\text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)} I_{\tilde{A}} = \text{in}_v(\text{in}_{(1, \dots, 1, 0)} I_{\tilde{A}})$$

は ∂_{n+1} を含まないので,

$$M = \langle \text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)} I_{\tilde{A}} \rangle = \langle \text{in}_{w(\varepsilon)} I_A \rangle \quad \text{in } \mathbf{C}[\partial_1, \dots, \partial_{n+1}].$$

ここで, $\tilde{w}(\varepsilon) = (w(\varepsilon), 0)$ で $w(\varepsilon)$ を決めた. 実際, $\{\partial^u - \partial^v\}$ を $I_{\tilde{A}}$ のグレブナ基底とすると,

$$\partial^u - \partial^v \in I_{\tilde{A}} \implies (\partial^u - \partial^v)|_{\partial_{n+1}=1} \in I_{\tilde{A}}, \quad \partial^u|_{\partial_{n+1}=1} = \partial^u$$

なので OK.

さて, $\tilde{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{n+1})$ とすると, [10] Theorem 3.1.3 より generic な $\tilde{\beta} = (\beta_0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{C}^d$ に対して, $\text{in}_{(-\tilde{w}(\varepsilon), \tilde{w}(\varepsilon))} H_{\tilde{A}}(\tilde{\beta})$ は $\text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)} I_{\tilde{A}}$ と $\tilde{A}\tilde{\theta} - \tilde{\beta}$ で生成される.

M の standard pairs を $T(M)$ で表す.

[10] Theorem 3.2.10 より

$$\langle \text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)} I_{\tilde{A}}, \tilde{A}\tilde{\theta} - \tilde{\beta} \rangle \quad (5.5)$$

は次の形の $\#T(M) = \text{vol}(\tilde{A})$ 個の 1 次独立解を持つ.

$$\{\tilde{x}^{\tilde{\lambda}} \mid (\partial^a, T) \in T(M)\}$$

ここで, $\tilde{\lambda}$ は,

$$\tilde{\lambda}_i = a_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, i \notin T \quad \text{and} \quad \tilde{A}\tilde{\lambda} = \tilde{\beta}$$

で定める. なお, この $\tilde{\lambda}$ は d -単体 τ に対して admissible である.

さて,

$$\langle \text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)} I_{\tilde{A}} \rangle = \langle \text{in}_{w(\varepsilon)} I_A \rangle$$

なので, 方程式系

$$\langle \text{in}_{w(\varepsilon)} I_A, A\theta - \beta \rangle \quad (5.6)$$

と (5.5) の違いは

$$\theta_1 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1} - \beta_0$$

のみであって, 他の方程式は x_{n+1}, ∂_{n+1} を含まない.

また, 任意の $(\partial^a, T) \in T(M)$ に対して, $n+1 \in \tau$ である. よって, (5.6) と (5.5) の解空間は, 対応

$$x^\lambda \mapsto \tilde{x}^{\tilde{\lambda}} \quad (5.7)$$

で同型である. ここで, $\tilde{\lambda} = (\lambda, \lambda_{n+1})$, λ_{n+1} は

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda_{n+1} - \beta_0 = 0$$

と定義する.

[10] Theorem 2.3.11 および Theorem 3.2.10 より,

$$\{\tilde{x}^{\tilde{\lambda}} \mid (\partial^a, T) \in T(M)\}$$

は \mathbb{C} 上 1 次独立なので, 同型 (5.7) から, $\text{vol}(A)$ 個の集合

$$\{x^\lambda \mid (\partial^a, T) \in T(M)\}$$

も \mathbb{C} 上 1 次独立となる. よって,

$$\left\{ \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} \mid (\partial^a, T) \in T(M) \right\}$$

を初項とする級数解たちは, \mathbb{C} 上 1 次独立となる.

最後に収束することを示す.

$\tilde{\phi}_\lambda(\tilde{x})$ は $(-\log|x_1|, \dots, -\log|x_{n+1}|) \in C(\tilde{A}, \tau, r)$ で収束する. ($r < 1$)
(5.4) より

$$\left| \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\lambda_j + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b_{ij} + 1)} \right| \leq c \left| \frac{1}{\Gamma(\lambda + \sum_{i=1}^{n-d} k'_i b^{(i)} + 1)} \right|$$

である.

$x_{n+1} = 1$ と置くと, $-\log|x_{n+1}| = 0$ だから $\tilde{w}(\varepsilon) \in \{y \mid y_{n+1} = 0\}$ であることを用いて

$$\bigcap_{\tau \in \Delta} C(\tilde{A}, \tau, r) \cap \{y \mid y_{n+1} = 0\}$$

は \mathbb{R}^n の, 空でない open subset である. よって $\phi_\tau(\lambda; x)$ は収束する. \square

結局, まとめると

補題 2. $\tilde{w} = (1, \dots, 1, 0)$ の近傍の *generic* な重みベクトル \tilde{w}' に対して \tilde{w}' 方向の $\text{vol}(A)$ 個の (微分方程式の解とみて一次独立な) $H_{\tilde{A}}$ の超幾何級数解を構成できる. この級数解の *dehomogenization* は収束し, H_A の解となる.

この方法は非同次な A に対して $\text{vol}(A)$ 個の収束解を構成するアルゴリズムを与えていることにも注意しておく.

6 例

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ および $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

行列 \tilde{A} は同次である. つまり $I_{\tilde{A}}$ は同次イデアルである. Weight ベクトル $\tilde{w}(\varepsilon) = (1, 1, 1, 0) + \frac{1}{100}(1, 0, 0, 0)$ に対して initial ideal $\text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)}(I_{\tilde{A}})$ は $\partial_1^2, \partial_1\partial_2, \partial_1\partial_3, \partial_2^3$ で生成される. initial ideal が ∂_4 を含まないことに注意しておこう. 級数解を構成するために, [10, Chapter 3] に従い, まず Initial system $(\tilde{A}\tilde{\theta} - \tilde{s}) \bullet g = 0, (\text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)}(I_{\tilde{A}})) \bullet g = 0$ を解こう. $\text{in}_{\tilde{w}(\varepsilon)}(I_{\tilde{A}})$ に対する standard pairs (∂^a, T) は $(\partial_1^0\partial_2^1, \{3, 4\}), (\partial_1^0\partial_2^0, \{3, 4\}), (\partial_1^0\partial_2^2, \{3, 4\})$ となる. したがって initial system の解空間の基底は

$$\begin{aligned} & x_1^0 x_2^1 x_3^{(s_1-2)/3} x_4^{s_0-1-(s_1-2)/3}, \\ & x_1^0 x_2^0 x_3^{s_1/3} x_4^{a_0-s_1/3}, \\ & x_1^0 x_2^2 x_3^{(s_1-4)/3} x_4^{s_0-2-(s_1-4)/3} \end{aligned}$$

となる ([10]). よって同次化した \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式 $H_{\tilde{A}}$ は次のような級数解をもつ.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) &= x_4^{s_0} \left(\frac{x_2}{x_4} \right) \left(\frac{x_3}{x_4} \right)^{\frac{s_1-2}{3}} \\ &\cdot \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq -1 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3} x_4^{-2/3} \right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3} x_4^{-1/3} \right)^{k_2}}{k_1! (k_2 + 1)! \Gamma\left(\frac{s_1 - k_1 - 2k_2 + 1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{3s_0 - s_1 - 2k_1 - k_2 + 2}{3}\right)} \\ \tilde{\phi}_2(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) &= x_4^{s_0} \left(\frac{x_3}{x_4} \right)^{\frac{s_1}{3}} \\ &\cdot \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3} x_4^{-2/3} \right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3} x_4^{-1/3} \right)^{k_2}}{k_1! k_2! \Gamma\left(\frac{s_1 - k_1 - 2k_2 + 3}{3}\right) \Gamma\left(\frac{3s_0 - s_1 - 2k_1 - k_2 + 3}{3}\right)} \\ \tilde{\phi}_3(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) &= x_4^{s_0} \left(\frac{x_2}{x_4} \right)^2 \left(\frac{x_3}{x_4} \right)^{\frac{s_1-4}{3}} \\ &\cdot \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq -2 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3} x_4^{-2/3} \right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3} x_4^{-1/3} \right)^{k_2}}{k_1! (k_2 + 2)! \Gamma\left(\frac{s_1 - k_1 - 2k_2 - 1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{3s_0 - s_1 - 2k_1 - k_2 + 1}{3}\right)} \end{aligned}$$

ここで

$$L' = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \equiv 0 \pmod{3}, k_2 \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \{(k_1, k_2) \mid k_1 \equiv 1 \pmod{3}, k_2 \equiv 1 \pmod{3}\}.$$

さて, この級数解を dehomogenize することにより \mathcal{A} -超幾何微分差分方程式系 H_A の次の収束解を得る.

$$\begin{aligned}\phi_1(\lambda, x) &= x_2 x_3^{\frac{s_1-2}{3}} \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq -1 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3}\right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3}\right)^{k_2}}{k_1!(k_2+1)!\Gamma\left(\frac{s_1-k_1-2k_2+1}{3}\right)} \\ \phi_2(\lambda, x) &= x_3^{\frac{s_1}{3}} \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3}\right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3}\right)^{k_2}}{k_1!k_2!\Gamma\left(\frac{s_1-k_1-2k_2+3}{3}\right)} \\ \phi_3(\lambda, x) &= x_2^2 x_3^{\frac{s_1-4}{3}} \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq -2 \\ (k_1, k_2) \in L'}} \frac{\left(x_1 x_3^{-1/3}\right)^{k_1} \left(x_2 x_3^{-2/3}\right)^{k_2}}{k_1!(k_2+2)!\Gamma\left(\frac{s_1-k_1-2k_2-1}{3}\right)}\end{aligned}$$

ここで $\phi_k(x)$ は $\tilde{\phi}_k(x)$ の dehomonization である.

最後に A に対応する超幾何微分差分方程式系を差分方程式に変換したものの Pfaffian system を掲載しておく. これの導出は H_A の Gröbner 基底を用いておこなった.

$$S_1 \begin{pmatrix} f \\ x_3 \partial_3 \bullet f \\ S_1 \bullet f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{s_1 x_1}{6x_2} & \frac{3x_1 x_3 - 4x_2^2}{6x_2 x_3} & \frac{2(s_1-1)x_2 + x_1^2}{6x_2} \\ \frac{s_1}{2x_2} & -\frac{3}{2x_2} & -\frac{x_1}{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ x_3 \partial_3 \bullet f \\ S_1 \bullet f \end{pmatrix}.$$

A ノート: 定義 2 に関する問題提起

差分方程式におけるランクと解空間の次元とは必ずしも一致しない. 例としてガンマ関数を考える.

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

であるから, $S : f(s) \mapsto f(s-1)$ として, $D = C(s)\langle S, S^{-1} \rangle$ のイデアル $I = \langle S^{-1} - s \rangle$ を考えていることになる. すると, $1 - (s-1)S \in I$ より, $C(s)$ 上のベクトル空間として $D/I \simeq C(s)$ であるから, I のランクは

$$\text{rank}(I) = \dim_{C(s)} D/I = 1.$$

しかし, I の解としてはガンマ関数以外にも,

$$\sin(2\pi k s)\Gamma(s) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

が存在する. $\sin(2\pi k s)$ は pseudoconstant と呼ばれる.

B 収束性の証明

命題 1 はつまり, A の正則三角形分割 Δ があたえられたとき, Δ の各単体 τ_i に対して決まる形式級数解 $f_{\tau_i}(s; x)$ が収束することを主張している.

B.1 準備

まず, Γ -因子の評価に関して, いくつかの補題を与える.

補題 3. $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して, 定数 $C, r > 0$ が存在して

$$1 \leq \binom{k_1 + k_2}{k_1} = \frac{(1)_{k_1+k_2}}{(1)_{k_1}(1)_{k_2}} \leq Cr^{k_1+k_2}. \quad (\text{B.1})$$

Proof. 下からの評価は自明, 上からの評価は $(1-x-y)^{-1}$ の級数展開

$$(1-x-y)^{-1} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{k_1+k_2}{k_1} x^{k_1} y^{k_2}$$

の収束性による. □

補題 4. 非負整数 $k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_m > 0$ に対して, 条件

$$k_1 + \dots + k_n = j_1 + \dots + j_m$$

が満たされるとき, 定数 $C, N_1, \dots, N_n, M_1, \dots, M_m > 0$ が存在して,

$$c(k; j) := \frac{(1)_{k_1} \cdots (1)_{k_n}}{(1)_{j_1} \cdots (1)_{j_m}} \leq CN_1^{k_1} \cdots N_n^{k_n} M_1^{j_1} \cdots M_m^{j_m}$$

が成り立つ.

Proof. 因子の数 n, m に関する二重帰納法で示す.

I. Case $n = m = 0$. $c(\emptyset; \emptyset) = 1$ なので自明.

II. $(n, m) \Rightarrow (n+1, m)$.

$k = (k_1, \dots, k_{n+1})$ に対して, $k' = (k_1, \dots, k_{n-1}, k_n + k_{n+1})$ と定めると, 補

題の仮定より

$$\begin{aligned}
c(k; j) &= \frac{(1)_{k_1} \cdots (1)_{k_{n+1}}}{(1)_{j_1} \cdots (1)_{j_m}} \\
&= \frac{(1)_{k_1} \cdots (1)_{k_{n-1}} (1)_{k_n+k_{n+1}}}{(1)_{j_1} \cdots (1)_{j_m}} \cdot \frac{(1)_{k_n} (1)_{k_{n+1}}}{(1)_{k_n+k_{n+1}}} \\
&= c(k'; j) \cdot \frac{(1)_{k_n} (1)_{k_{n+1}}}{(1)_{k_n+k_{n+1}}} \\
&\leq C' N_1^{k_1} \cdots N_{n-1}^{k_{n-1}} N_n^{k_n+k_{n+1}} M_1^{j_1} \cdots M_m^{j_m} \cdot 1
\end{aligned}$$

なる $C', N'_1, \dots, N'_n, M'_1, \dots, M'_m$ が存在するので,

$$C = C', N_1 = N'_1, \dots, N_n = N'_n, N_{n+1} = N'_n, M_1 = M'_1, \dots, M_m = M'_m$$

と決めればよい.

III. $(n, m) \Rightarrow (n, m+1)$.

$j = (j_1, \dots, j_{m+1})$ に対して, $j' = (j_1, \dots, j_{m-1}, j_m + j_{m+1})$ と定めると, 補題の仮定と, 補題 3 より

$$\begin{aligned}
c(k; j) &= \frac{(1)_{k_1} \cdots (1)_{k_n}}{(1)_{j_1} \cdots (1)_{j_{m+1}}} \\
&= \frac{(1)_{k_1} \cdots (1)_{k_n}}{(1)_{j_1} \cdots (1)_{j_{m-1}} (1)_{j_m+j_{m+1}}} \cdot \frac{(1)_{j_m+j_{m+1}}}{(1)_{j_m} (1)_{j_{m+1}}} \\
&= c(k; j') \cdot \frac{(1)_{j_m+j_{m+1}}}{(1)_{j_m} (1)_{j_{m+1}}} \\
&\leq C' N_1^{k_1} \cdots N_n^{k_n} M_1^{j_1} \cdots M_m^{j_m+j_{m+1}} \cdot C'' r^{j_m+j_{m+1}} \\
&= (C' C'') N_1^{k_1} \cdots N_n^{k_n} M_1^{j_1} \cdots (M'_m r)^{j_m+j_{m+1}}
\end{aligned}$$

なる $C', N'_1, \dots, N'_n, M'_1, \dots, M'_m, C'', r$ が存在するので,

$$C = C' C'', N_1 = N'_1, \dots, N_n = N'_n, M_1 = M'_1, \dots, M_{m-1} = M'_{m-1}, M_m = M_{m+1} = M'_m r$$

と決めればよい. □

補題 5. $0 < a$ に対して, 正数 r, R が存在して,

$$R^n \leq \frac{(a)_n}{(1)_n} \leq r^n.$$

Proof. $r = \max\{1, a\}$, $R = \min\{1, a\}$ ととればよい. □

補題 6. 任意の複素数 c に対して, $|(c)_n/(1)_n| \leq r^n$ なる正数 r が存在する.

Proof. $r = \max\{1, |c|\}$ とすると, 三角不等式より

$$\left| \frac{(c)_n}{(1)_n} \right| \leq \frac{(|c|)_n}{(1)_n} \leq r^n$$

と抑えられる. □

補題 7. 複素数 $c \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ に対して, $|(1)_n/(c)_n| \leq Cr^n$ なる正数 C, r が存在する.

Proof. Pochhammer symbol について

$$(c)_n \sim \frac{(1)_n n^{c-1}}{\Gamma(c)}$$

が成り立つので,

$$\left| \frac{(1)_n}{(c)_n} \right| \sim |\Gamma(c)n^{1-c}|$$

であるから, 明らかに適当な n で抑えられる. □

以上の考察から, $(1)_k/(c)_k$ および $(c)_k/(1)_k$ の絶対値は (c が非正整数のときを除いて), k の n で抑えられることが分かる.

命題 4. $(k_i) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^m$ および $(b_{ij}) \in M(m, n, \mathbf{Q})$ に対して, 条件

$$\sum_{i=1}^m k_i b_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} = 0.$$

を仮定する. パラメータ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ が, あるコンパクト集合 K に含まれるとき, λ に依存しない正数 C, r_1, \dots, r_m が存在して

$$\left| \prod_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij} k_i + \lambda_j + 1)} \right| \leq Cr_1^{k_1} \dots r_m^{k_m}$$

Proof. 各セクションごとに因子に分解することで示す.

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \prod_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij} k_i + \lambda_j + 1)} \right| \\ &= \prod_{j=1}^n \left| \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij} k_i + \lambda_j + 1)} \right| \end{aligned}$$

ここでセクションというのは、それぞれの $\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i$ の正負が一定になる領域のことをいう。それぞれのセクションごとに示せばそれらを合わせれば全体で示したことになる。さてセクションを固定してやると、一般性を失わずに

$$\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i \begin{cases} \geq 0 & (1 \leq j \leq l) \\ \leq 0 & (l < j \leq n) \end{cases}$$

としてよい。すると λ_j ($l < j \leq n$) が非整数という条件のもとでガンマ関数の相補公式より

$$\begin{aligned} |a_k| &= \prod_{j=1}^l \left| \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i + \lambda_j + 1)} \right| \prod_{j=l+1}^n \left| \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i + \lambda_j + 1)} \right| \\ &= C_0 \prod_{j=1}^l \left| \frac{1}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i + \lambda_j + 1)} \right| \prod_{j=l+1}^n \left| \Gamma(-\lambda_j - \sum_{i=1}^m b_{ij}k_i) \right| \\ &= C_0 \prod_{j=1}^l \left| \frac{(\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i)!}{\Gamma(\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i + \lambda_j + 1)} \right| \prod_{j=l+1}^n \left| \frac{\Gamma(-\lambda_j - \sum_{i=1}^m b_{ij}k_i)}{(-\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i)!} \right| \left| \frac{\prod_{j=l+1}^n (-\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i)!}{\prod_{j=1}^l (\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i)!} \right| \end{aligned}$$

ここで C_0 は相補公式から決まる定数。それぞれの因子について評価してやれば証明は完了する。注意すべきことは最後の因子について

$$\prod_{j=1}^l \sum_{i=1}^m b_{ij}k_i - \prod_{j=l+1}^n \left(-\sum_{i=1}^m b_{ij}k_i \right) = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij}k_i = 0$$

となっていることである。さて、最初の二つの因子については、補題 7 および 補題 6 による。最後の因子については補題 4 による。□

参考文献

- [1] A.Adolphson, Hypergeometric functions and rings generated monomials. Duke Mathematical Journal **73** (1994), 269–290.
- [2] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, Springer 東京, 1994.
- [3] L.J.Billera, P.Filliman, B.Sturmfels, Constructions and complexity of secondary polytopes, Advances in Mathematics **83** (1990), 155–179.

- [4] I.M.Gel'fand, A.V.Zelevinsky, M.M.Kapranov, Hypergeometric functions and toral manifolds. *Functional Analysis and its Applications* **23** (1989), 94–106.
- [5] L. F. Matusevich, E. Miller, and U. Walther, Homological Methods for Hypergeometric Families, 2004, arXiv:math.AG/0406383, *Journal of American Mathematical Society* **18** (2005), 919–941.
- [6] 小原功任, Risa/Asir Package for Non-commutative Gröbner Bases and its Applications, *数理研講究録* **1395** (2004), 45 – 49.
- [7] The OpenXM project, <http://www.OpenXM.org/>
- [8] M.Saito, Parameter shift in normal generalized hypergeometric systems. *Tohoku Mathematical Journal* **44** (1992), 523–534.
- [9] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, N., Hypergeometric polynomials and integer programming. *Compositio Mathematica*, **155** (1999), 185–204.
- [10] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000.
- [11] B.Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series Volume 8, American Mathematical Society, 1996

平面 3 次曲線 Hesse 標準形に関する周期

K. Matsumoto

December 27, 2006

Abstract

この論文では平面 3 次曲線 Hesse の標準形に関する周期写像に関する事実を整理しておく。

Keywords: Cubic curves of Hessian normal form, Period map, Theta functions.

MSC2000: 14H52, 14H42

Contents

1 序	2
2 平面 3 次曲線 の Hesse の標準形	2
3 ホモロジー群の基底	9
4 $C(\lambda)$ 上の正則 1 次形式	12
5 $C(\lambda)$ 上の周期積分	14
6 周期のみたす微分方程式	16
7 周期の monodromy 群	26
8 テータ関数	39
9 λ の τ による表示	43

10 テータ関数のみたす関係式	52
11 テータ関数のみたす3次関係式	63
12 テータ関数への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用	69

1 序

この論文では射影平面 \mathbb{P}^2 内の3次曲線 Hesse の標準形

$$C(\lambda) : t_0^3 + t_1^3 + t_2^3 - 3\lambda t_0 t_1 t_2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{1, \omega, \omega^2\},$$

に関する周期写像のみたす微分方程式、モノドロミー群を求める。また、周期写像の逆写像を theta constants を用いて表示する。

2 平面3次曲線の Hesse の標準形

射影平面 \mathbb{P}^2 内の非特異3次曲線は、射影座標の変換により、以下の Hesse の標準形に変形できることが知られている ([Hu] Chapter 4, Section2)。

$$C(\lambda) = \{t = [t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid F_\lambda(t) = t_0^3 + t_1^3 + t_2^3 - 3\lambda t_0 t_1 t_2 = 0\}, \quad (1)$$

ここで λ は1の3乗根 $1, \omega, \omega^2$ 以外の値をとる複素パラメーターとする。

集合 $U_2 = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_2 \neq 0\}$ 上ではアフィン座標 $(x, y) = (t_0/t_2, t_1/t_2)$ を用いて $C(\lambda) \cap U_2$ を

$$C^\circ(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0\}$$

と表示できる。無限遠平面 $t_2 = 0$ 上にある $C(\lambda)$ の点は $[\omega^k, -1, 0]$ ($k = 0, 1, 2$) の3点なので

$$C(\lambda) = C^\circ(\lambda) \cup \{[-1, 1, 0], [-\omega, 1, 0], [-\omega^2, 1, 0]\}$$

である。

座標 y が $C^\circ(\lambda)$ の局所座標として採用できない点を調べておく。そのような点は連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3\lambda y = 0, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0$$

の解で与えられる。関係式 $x^2 = \lambda y$ により方程式 $f(x, y) = 0$ を

$$y^3 + 1 = (3\lambda y - x^2)x = 2\lambda yx$$

に変形し、両辺 2 乗すると

$$(y^3 + 1)^2 = 4\lambda^3 y^3$$

が得られる。任意の λ に対して $y = 0$ はこの方程式の解ではなく、

$$y^3 = 2\lambda^3 - 1 \pm 2\sqrt{\lambda^3(\lambda^3 - 1)}$$

となる。この方程式の 6 つの解を η_1, \dots, η_6 とすると $C^\circ(\lambda)$ 上で y が局所座標として採用できない点は

$$(x, y) = \left(\frac{\eta_j^3 + 1}{2\lambda\eta_j}, \eta_j \right) \quad (j = 1, \dots, 6)$$

である。 $C^\circ(\lambda)$ 上の 3 点 $(x, y) = (-1, 0), (-\omega, 0), (-\omega^2, 0)$ では任意の λ に対して y が局所座標として採用できる。また、 λ が実数で开区間 $(0, 1)$ に属しているとき、 y の値は決して実数にならないので、 $C^\circ(\lambda) \cap \mathbb{R}^2$ 上の点ではいつでも y が局所座標として採用できる。 $\lambda = 0$ の場合、 y が局所座標として採用できない点は

$$(x, y) = (0, -1), \quad (0, -\omega), \quad (0, -\omega^2)$$

の 3 点のみで、 η_1, \dots, η_6 が 3 つの 2 重根 $-1, -\omega, -\omega^2$ となる。曲線 $C(\lambda)$ は射影直線 \mathbb{P}^1 (y -space) のこれらの 3 点で分岐する 3 重の巡回被覆となる。

y が局所座標として採用できるとき、 $C^\circ(\lambda)$ の x 座標を y を用いて表示する。複素数 α, β で

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 3(\lambda y)x + (y^3 + 1) \\ &= x^3 - 3(\alpha\beta)x + (\alpha^3 + \beta^3) = (x + \alpha + \beta)(x + \omega\alpha + \omega^2\beta)(x + \omega^2\alpha + \omega\beta) \end{aligned}$$

をみだすものを見つければ $x = -\alpha - \beta, -\omega\alpha - \omega^2\beta, -\omega^2\alpha - \omega\beta$ となる。そのためには α, β が変数の連立方程式

$$\alpha\beta = \lambda y, \quad \alpha^3 + \beta^3 = y^3 + 1$$

を解けばよい。解と係数の関係より α^3, β^3 は t に関する 2 次方程式

$$t^2 - (y^3 + 1)t + (\lambda y)^3 = 0$$

の解なので

$$\alpha^3, \beta^3 = \frac{(y^3 + 1) \pm \sqrt{(y^3 + 1)^2 - 4\lambda^3 y^3}}{2}$$

である。この方程式の解が重根でない、つまり平方根の中身が 0 でないとき、 y は局所座標として採用できる。 α のとり方は 6 通りあるが、どれでもいいからそのうちのひとつを α_0 と指定する。つまり

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{(y^3 + 1) + \sqrt{(y^3 + 1)^2 - 4\lambda^3 y^3}}{2}}$$

とし、分枝の指定はここでは厳密には行わない。それでも $\lambda y \neq 0$ ならば $\beta = \frac{\lambda y}{\alpha}$ より、 β の分枝は α_0 のとり方から自動的に定まり x の表示

$$x = -\alpha_0 - \frac{\lambda y}{\alpha_0}, \quad -\omega \alpha_0 - \omega^2 \frac{\lambda y}{\alpha_0}, \quad -\omega^2 \alpha_0 - \omega \frac{\lambda y}{\alpha_0}$$

が得られる。 $\lambda y = 0$ の場合は α_0 の表示内の平方根を $y^3 + 1$ でとり、 $\alpha_0 = \sqrt[3]{y^3 + 1}$ とし、 $\beta = 0$ とする。

α^3, β^3 を決定する 2 次方程式は、 y に ω がかかっても不変である。曲線 $C(\lambda)$ 上の ωy に対応する x 座標の値は

$$x = -\alpha_0 - \omega \frac{\lambda y}{\alpha_0}, \quad -\omega \alpha_0 - \frac{\lambda y}{\alpha_0}, \quad -\omega^2 \alpha_0 - \omega^2 \frac{\lambda y}{\alpha_0}$$

となる。

また、 λ, y がともに実数で α^3, β^3 の表示の平方根の中身が負の実数のとき、 α^3, β^3 は共役な複素数となり 3 乗根の分枝の指定は $\alpha\beta = \lambda y$ をみたすように定めるが、 α, β も共役な複素数となる。このとき $x = -\alpha - \beta, -\omega\alpha\omega^2\beta, -\omega^2\alpha - \omega\beta$ はすべて実数となる。

3 次対称群 S_3 の元 σ から定まる線型変換

$$r_\sigma : \mathbb{C}^3 \ni (t_0, t_1, t_2) \mapsto (t_{\sigma(0)}, t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}) \in \mathbb{C}^3$$

では多項式 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ は不変なので、 r_σ は $C(\lambda)$ の自己同型 ρ_σ を誘導する。また、 $(\mathbb{Z}_3)^2 = \{(\omega^j, \omega^k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ の元 (ω^j, ω^k) から定まる線型変換

$$r_{j,k} : \mathbb{C}^3 \ni (t_0, t_1, t_2) \mapsto (\omega^j t_0, \omega^k t_1, (\omega)^{-j-k} t_2) \in \mathbb{C}^3$$

でも $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ は不変なので、 $r_{j,k}$ も $C(\lambda)$ の自己同型 $\rho_{j,k}$ を誘導する。 r_σ と $r_{j,k}$ たちで生成される群 G は $GL_3(\mathbb{Z}[\omega])$ の部分群とみなせる。行列式

が 1 となる指数 2 の G の部分群を SG とする。スカラー行列 ωI_3 に対応する $C(\lambda)$ の自己同型は恒等写像なので ρ_σ と $\rho_{j,k}$ たちで生成される群は商群 $PG = G/\langle \omega I \rangle$ と同型である。さらにこの群 PG は半直積 $S_3 \times \mathbb{Z}_3$ と同型で位数は 18 である。また、群 $PSG = SG/\langle \omega I \rangle$ は直積 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ と同型であり、さらに

$$\begin{aligned} r_1 &: \mathbb{C}^3 \ni (t_0, t_1, t_2) \mapsto (t_2, t_0, t_1) \in \mathbb{C}^3, \\ r_2 &: \mathbb{C}^3 \ni (t_0, t_1, t_2) \mapsto (t_0, \omega t_1, \omega^2 t_2) \in \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

から誘導される $C(\lambda)$ の自己同型 ρ_1, ρ_2 で生成される群とも同型である。
多項式 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ の Hessian $H_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ は

$$\begin{aligned} H_\lambda(t_0, t_1, t_2) &= \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_j \partial t_k} \right)_{0 \leq j, k \leq 2} = \det \begin{pmatrix} 6t_0 & -3\lambda t_2 & -3\lambda t_1 \\ -3\lambda t_2 & 6t_1 & -3\lambda t_0 \\ -3\lambda t_1 & -3\lambda t_0 & 6t_2 \end{pmatrix} \\ &= 27[(8 - 2\lambda^3)t_0 t_1 t_2 - 2\lambda^2(t_0^3 + t_1^3 + t_2^3)] \end{aligned}$$

である。曲線 $C(\lambda)$ の変曲点は、 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ と $H_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ との共通零点であり、 $2\lambda^2 F_\lambda(t_0, t_1, t_2) + H_\lambda(t_0, t_1, t_2)/27 = 8(1 - \lambda^3)t_0 t_1 t_2$ より下記の 9 点である。

$$\begin{aligned} P_0 &= [0, -1, 1], & P_1 &= [1, 0, -1], & P_2 &= [-1, 1, 0], \\ P_3 &= [0, -\omega, \omega^2], & P_4 &= [1, 0, -\omega^2], & P_5 &= [-1, \omega, 0], \\ P_6 &= [0, -\omega^2, \omega], & P_7 &= [1, 0, -\omega], & P_8 &= [-1, \omega^2, 0]. \end{aligned}$$

点 P_{3k+j} ($j, k = 0, 1, 2$) の t_j -座標が 0 となるように設定している。

曲線 $C(\lambda)$ の変曲点の座標は、 λ の値によらず一定であり、

$$\begin{aligned} \rho_1(P_j) &= P_{j+1}, & \rho_1^2(P_j) &= P_{j+2}, & (j = 0, 3, 6) \\ \rho_2(P_k) &= P_{k+3}, & \rho_2^2(P_k) &= P_{k+6}, & (k = 0, 1, 2) \\ \rho_2^k \rho_1^j(P_0) &= P_{3k+j} & (j, k = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

をみたすので、変曲点全体の集合に PSG が推移的に作用する。また、群 PG の P_0 に関する固定群は $\rho_{(1,2)}$ で生成される位数 2 の部分群である、ここで $(1, 2)$ は文字 0, 2 の互換を表す。2 つの変曲点 P_i と P_j を結ぶ直線上にはもう 1 点の変曲点 P_k が必ず存在している。そのような直線 $L_{ijk} : \ell_{ijk} = 0$ は $\binom{9}{2}/3 = 12$ 本存在する。これらの直線の定義 1 次式を全て列挙しておく。

$$\begin{aligned} \ell_{012} &= t_0 + t_1 + t_2, & \ell_{345} &= t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2, & \ell_{678} &= t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2, \\ \ell_{036} &= t_0, & \ell_{147} &= t_1, & \ell_{258} &= t_2, \\ \ell_{048} &= \omega^2 t_0 + t_1 + t_2, & \ell_{156} &= t_0 + \omega^2 t_1 + t_2, & \ell_{237} &= t_0 + t_1 + \omega^2 t_2, \\ \ell_{057} &= \omega t_0 + t_1 + t_2, & \ell_{138} &= t_0 + \omega t_1 + t_2, & \ell_{246} &= t_0 + t_1 + \omega t_2. \end{aligned}$$

群 PSG の作用により、これらの直線は下記の4つの軌道に分かれる。

$$\{L_{012}, L_{345}, L_{678}\}, \{L_{036}, L_{147}, L_{258}\}, \{L_{048}, L_{156}, L_{237}\}, \{L_{057}, L_{138}, L_{246}\}.$$

各変曲点 P_j における接線 L_j の定義1次式 ℓ_j を与える。

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \lambda t_0 + t_1 + t_2, & \ell_1 &= t_0 + \lambda t_1 + t_2, & \ell_2 &= t_0 + t_1 + \lambda t_2, \\ \ell_3 &= \lambda t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2, & \ell_4 &= t_0 + \omega^2 \lambda t_1 + \omega t_2, & \ell_5 &= t_0 + \omega^2 t_1 + \omega \lambda t_2, \\ \ell_6 &= \lambda t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2, & \ell_7 &= t_0 + \omega \lambda t_1 + \omega^2 t_2, & \ell_8 &= t_0 + \omega t_1 + \omega^2 \lambda t_2. \end{aligned}$$

実際、方程式 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2) = 0$ と $\ell_0 = 0$ から変数 t_2 を消去すると

$$t_0^3 + t_1^3 - (\lambda t_0 + t_1)^3 + 3\lambda t_0 t_1 (\lambda t_0 + t_1) = (1 - \lambda^3) t_0^3 = 0$$

が得られ、 $t_0 = 0$ が3重根となっている。 $t_0 = 0$ と ℓ_0 の交点は $P_0 = [0, -1, 1]$ なので L_0 は P_0 で $C(\lambda)$ と3重に交わる直線である。曲線 $C(\lambda)$ の変曲点での接線の方程式は、 λ の値によって変化する。変曲点 P_{3k+j} での接線 ℓ_{3k+j} の定義1次式の t_j の係数に λ があり、次の等式をみだす。

$$\begin{aligned} \ell_0 + \ell_3 + \ell_6 &= 3\lambda t_0, & \ell_1 + \ell_4 + \ell_7 &= 3t_0, & \ell_2 + \ell_5 + \ell_8 &= 3t_0, \\ \ell_0 + \omega \ell_3 + \omega^2 \ell_6 &= 3t_1, & \ell_1 + \omega \ell_4 + \omega^2 \ell_7 &= 3\lambda t_1, & \ell_2 + \omega \ell_5 + \omega^2 \ell_8 &= 3t_1, \\ \ell_0 + \omega^2 \ell_3 + \omega \ell_6 &= 3t_2, & \ell_1 + \omega^2 \ell_4 + \omega \ell_7 &= 3t_2, & \ell_2 + \omega^2 \ell_5 + \omega \ell_8 &= 3\lambda t_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 &= (2 + \lambda)(t_0 + t_1 + t_2) = (2 + \lambda)\ell_{012}, \\ \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 &= (2 + \lambda)(t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2) = (2 + \lambda)\ell_{345}, \\ \ell_6 + \ell_7 + \ell_8 &= (2 + \lambda)(t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2) = (2 + \lambda)\ell_{678}. \end{aligned}$$

また、多項式 ℓ_j の r_1^{-1}, r_2^{-1} による引き戻しは

$$\begin{aligned} (r_1^{-1})^*(\ell_j) &= \ell_{j+1}, & (r_1^{-2})^*(\ell_j) &= \ell_{j+2}, & (j &= 0, 3, 6) \\ (r_2^{-1})^*(\ell_k) &= \ell_{k+3}, & (r_2^{-2})^*(\ell_k) &= \ell_{k+6}, & (k &= 0, 1, 2) \\ (r_2^{-k} r_1^{-j})^*(\ell_0) &= \ell_{3k+j} & (j, k &= 0, 1, 2) \end{aligned}$$

となる。変曲点における9本の接線全体の集合に PSG が推移的に作用している。

\mathbb{C}^3 の座標変換

$$r_3 : (t'_0, t'_1, t'_2) \mapsto (t_0, t_1, t_2) = (\omega t'_0, t'_1, t'_2)$$

は、射影平面の座標変換を引き起こす。この座標変換による多項式 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ の引き戻しは

$$(r_3^{-1})^*(F_\lambda(t_0, t_1, t_2)) = (t'_0)^3 + (t'_1)^3 + (t'_2)^3 - 3\omega\lambda t'_0 t'_1 t'_2$$

である。この座標変換により、3次曲線 $C(\omega\lambda)$ が得られる。つまり、パラメーター λ の3次曲線 $C(\lambda)$ とパラメーター $\omega\lambda$ の3次曲線 $C(\omega\lambda)$ とは複素多様体として同型である。

また、 \mathbb{C}^3 の座標変換

$$r_4 : (t_0, t_1, t_2) \mapsto (t'_0, t'_1, t'_2) = (t_0, t_1, t_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

は、射影平面の座標変換を引き起こす。この座標変換 r_4^{-1} による多項式 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ の引き戻しは

$$\begin{aligned} F_\lambda(t_0, t_1, t_2) &= t_0^3 + t_1^3 + t_2^3 - 3t_0 t_1 t_2 - 3(\lambda - 1)t_0 t_1 t_2 \\ &= (t_0 + t_1 + t_2)(t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2)(t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2) - 3(\lambda - 1)t_0 t_1 t_2 \end{aligned}$$

および

$$(t_0, t_1, t_2) = \frac{1}{3}(t'_0, t'_1, t'_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

により、

$$\begin{aligned} &(r_4^{-1})^*(F_\lambda(t_0, t_1, t_2)) \\ &= t'_0 t'_1 t'_2 - \frac{3(\lambda - 1)}{3^3}(t'_0 + t'_1 + t'_2)(t'_0 + \omega^2 t'_1 + \omega t'_2)(t'_0 + \omega t'_1 + \omega^2 t'_2) \\ &= \frac{1 - \lambda}{9} [(t'_0)^3 + (t'_1)^3 + (t'_2)^3 - 3\frac{\lambda + 2}{\lambda - 1} t'_0 t'_1 t'_2] \end{aligned}$$

である。この座標変換により、3次曲線 $C(\frac{\lambda+2}{\lambda-1})$ が得られる。つまり、パラメーター λ の3次曲線 $C(\lambda)$ とパラメーター $\frac{\lambda+2}{\lambda-1}$ の3次曲線 $C(\frac{\lambda+2}{\lambda-1})$ とは複素多様体として同型である。1次分数変換

$$\omega\lambda, \quad \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1}$$

で生成される群を考える。2つの1次分数変換で集合 $\{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ は不変である。実際、変換 $\omega\lambda$ では ∞ は不変で $1, \omega, \omega^2$ には3次巡回置換として作

用し、変換 $\frac{\lambda+2}{\lambda-1}$ では 1 と ∞ , ω と ω^2 が入れかわる。1 次分数変換は 3 点の像で一意的に定まるので、この群から A_4 への写像の核は恒等変換のみである。準同型定理よりこの群は 4 次交代群 A_4 と同型である。

λ をこれらの 1 次分数変換で移すと 12 種類の 1 次分数式が得られる。それらの積は

$$\frac{\lambda^3(\lambda^3 + 2^3)^3}{(\lambda^3 - 1)^3}$$

となり、これらの変換で不変な式となる。

一方、座標変換

$$w : (t'_0, t'_1, t'_2) \mapsto (t_0, t_1, t_2) = (t'_0, t'_1, t'_2) \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & 0 \\ \frac{\lambda^3}{4} - 1 & \frac{\lambda^3}{4} - 1 & \frac{3\lambda^2}{2} \end{pmatrix}$$

により、 $F_\lambda(t_0, t_1, t_2)$ は Weierstrass の標準形

$$\frac{4}{1 - \lambda^3} w^*(F(t_0, t_1, t_2)) = -(t'_1)^2 t'_2 + 4(t'_0)^3 - g_2 t'_0 (t'_2)^2 - g_3 (t'_2)^3$$

$$g_2 = 3\lambda(\lambda^3 + 8), \quad g_3 = -\lambda^6 + 20\lambda^3 + 8$$

に変形できる。従って 3 次曲線 $C(\lambda)$ の J -不変量は

$$J(C(\lambda)) = \frac{g_2^3}{g_3^2 - 27g_3^2} = \frac{\lambda^3(\lambda^3 + 2^3)^3}{64(\lambda^3 - 1)^3}$$

となっている。 $J(C(\lambda))$ の 64 倍が前記の A_4 -不変式と一致する。

Remark 1 ここで現れた 1 次分数変換と同じものが文献 [E] Section 5.4 にも登場している。

座標変換 r_3, r_4 によって 9 個の変曲点は以下のように変化する。

$$\begin{aligned} r_3(P_0) &= P_0, & r_3(P_1) &= P_4, & r_3(P_2) &= P_8, \\ r_3(P_3) &= P_3, & r_3(P_4) &= P_7, & r_3(P_5) &= P_2, \\ r_3(P_6) &= P_6, & r_3(P_7) &= P_1, & r_3(P_8) &= P_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4(P_0) &= P_0, & r_4(P_1) &= P_3, & r_4(P_2) &= P_6, \\ r_4(P_3) &= P_2, & r_4(P_4) &= P_5, & r_4(P_5) &= P_8, \\ r_4(P_6) &= P_1, & r_4(P_7) &= P_4, & r_4(P_8) &= P_7. \end{aligned}$$

Remark 2 9個の変曲点とそれらを結ぶ直線の配置は、1点を通る直線が4本あり、1直線上には3点あるという状況になっている。このような配置を保つ変換群 $Aut(\ell)$ については文献 [CM](Section 7.7) に記載されている。その群の位数は 432 で9次対称群での実現および群を決定する生成元と関係式が記述されている。点 P_0 を固定する群は、 S_4 を指数2の部分群として含む位数 48 の群であることが知られている。座標変換 r_3, r_4, t_1, t_2 座標の置換 $r_{(12)}$ および複素共役で生成される群は、 P_0 を固定しそれにより引き起こされる λ の1次分数変換は4点集合 $\{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ に4次対称群 $(r_{(12)})$ の作用は自明なものに退化してしまう) として作用する。点 P_0 を他の点へ移す変換 r_1, r_2 をあわせると位数が $432 = 9 \times 48$ である群 $Aut(\ell)$ が得られる。複素共役を除いて得られる $Aut(\ell)$ の指数2の部分群は *Hesse* 群と呼ばれる。

3 ホモロジー群の基底

曲線 $C(\lambda)$ の変曲点 P_0 と P_1 を結ぶ道を γ_{01} とする。 $\rho_1(\gamma_{01})$ の境界 $\partial(\rho_1(\gamma_{01}))$ は $P_2 - P_1$ であり、 $\rho_1^2(\gamma_{01})$ の境界 $\partial(\rho_1^2(\gamma_{01}))$ は $P_0 - P_2$ なので $B = (1 + \rho_1 + \rho_1^2)(\gamma_{01})$ の境界は消えてサイクルとなる。同様に曲線 $C(\lambda)$ の変曲点 P_0 と P_3 を結ぶ道を γ_{03} に対して、 $A = (1 + \rho_2 + \rho_2^2)(\gamma_{03})$ はサイクルとなる。 A と B の交点数 $A \cdot B = -1$ となるように、複素パラメーター λ が $\sqrt[3]{2}$ の場合に γ_{01} を γ_{03} を具体的に与え、一般の λ の場合は A, B の定まり方が局所的には自明であることから $\lambda = 0$ で構成した A, B の接続として与える。これらのサイクルは接続する道のとり方に依存し、複素パラメーター λ の値によって一意的に定まるものではなく、 $\mathbb{C} - \{1, \omega, \omega^2\}$ の普遍被覆上で一意的に定まっているものである。

$\lambda = \sqrt[3]{2} \in (0, 1)$ の場合にサイクルを構成する。§2での考察より、この場合 y が局所座標として採用できない点 $\{\eta_1, \dots, \eta_6\}$ は $\{\pm i, \pm \omega i, \pm \omega^2 i\}$ である。とくに $y \in \mathbb{R}$ ならば y がいつでも $C^\circ(\lambda)$ の局所座標として採用でき、その y 座標の値を持つ $C^\circ(\lambda)$ の点 (x, y) で x 座標の値も実数となるものはただ1つに限る。変曲点 $P_0 = (0, -1)$ と $P_1 = (-1, 0)$ を結ぶ道を γ_{01} を y が閉区間 $[0, 1]$ 内を動いたときにできる $C^\circ(\lambda) \cap \mathbb{R}^2$ 内の点の軌跡

$$\gamma_{01} : [-1, 0] \ni y \mapsto (x, y) \in C^\circ(\lambda) \cap \mathbb{R}^2$$

として定める。実際、 x 座標は y を用いて

$$x = -\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{(y^3 + 1) + \sqrt{y^6 + 1}}{2}}$$

と表示できる、ここで α_0 の表示における平方根は正值でとり、立方根は実数値でとる。このとき $\alpha_0 > 1$ であることに注意する。

この γ_{01} に対して、

$$B = (1 + \rho_1 + \rho_1^2)(\gamma_{01})$$

で定める。自己同型 ρ_1 の係数は実数なので、 $\rho_1(\gamma_{01}), \rho_1^2(\gamma_{01})$ は $C^\circ(\lambda)$ と実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ との共通部分 $\mathbb{C}(\lambda) \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ となる。

§2 で指摘したように y に対する x の値は

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{(y^3 + 1) + \sqrt{y^6 + 1}}{2}}$$

とおき、

$$x = -\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}, \quad -\omega\alpha_0 - \omega^2 \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}, \quad -\omega^2\alpha_0 - \omega \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0},$$

で与えられる。変曲点 $P_3 = (0, -\omega^2)$ においても α_0 の表示内の平方根と立方根の分枝を $\alpha_0 = \sqrt[6]{2}$ となるようにとれる。そうした場合は、 P_3 の近傍では曲線 $C(\sqrt[3]{2})$ は局所座標 y を用いて

$$\left(-\omega\alpha_0 - \omega^2 \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}, y\right)$$

と表示できる。実際 $y = -\omega^2$ のときに x 座標の値は 0 になる。この表示を $-\omega^2$ と 0 を結ぶ線分に沿って接続する。 $y = 0$ のときの x 座標の値は $-\omega$ になるので、変曲点 P_3 と P_4 を結ぶ道 γ_{34} が得られる。この道は γ_{01} を自己同型 ρ_2 で移したものと一致する。

小さな正数 ε に対して y 空間内の道 γ_ε を -1 から $-1 - \varepsilon$ に実軸にそって進み、半径 $(1 + \varepsilon)$ の円に沿って負の向きに $(1 + \varepsilon)\omega$ まで進み、そのあと線分に沿って 0 へ至るものとする。

この道に沿って

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{(y^3 + 1) + \sqrt{y^6 + 1}}{2}}, \quad x = -\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}$$

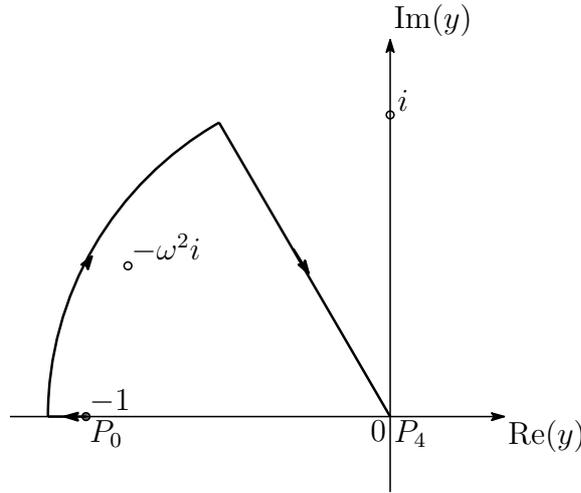


Figure 1: path from -1 to 0

を解析接続すると $C(\sqrt[3]{2})$ 内の変曲点 P_0 と P_4 を結ぶ道 γ_{04} が得られる。 y が -1 から $-1-\varepsilon$ まで動くとき、 α_0 も実数値で値はわずかに減少し、 x の値も実数値で値はわずかに増加する。次に y が半径 $(1+\varepsilon)$ の円に沿って負の向きに $(1+\varepsilon)\omega$ まで進んだときの α_0 の変化を追跡する。そのとき y^6+1 の値は $y = -1-\varepsilon$ でも $y = (1+\varepsilon)\omega$ でも同じ実数値 $(1+\varepsilon)^6+1$ であるが、原点の周りを負の向きに 1 周するので偏角には -2π のずれが生じる。したがって平方根の分枝が異なるものになる。また、立方根の中身 $(y^3+1) \pm \sqrt{y^6+1}$ が実数 R となる場合は

$$(y^3+1-R)^2 = y^6+1, \quad \text{i.e. } 2(R-1)y^3 = R^2-2R$$

より $R \neq 1$ であり $y^3 \in \mathbb{R}$ である。上記の円弧上で y^3 が実数となるのは $y = -1-\varepsilon, (1+\varepsilon)\omega$ の 2 点のみで、そこでの $(y^3+1) \pm \sqrt{y^6+1}$ 値は

$$[(y^3+1) + \sqrt{y^6+1}]_{y=-1-\varepsilon} \doteq \sqrt{2}, \quad [(y^3+1) - \sqrt{y^6+1}]_{y=(1+\varepsilon)\omega} \doteq 2 - \sqrt{2}$$

であり、ともに正である。従って、この円弧に沿う接続では立方根の中身の偏角は 2π を超えて変化することはない。つまり $y = (1+\varepsilon)\omega$ では

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{(y^3+1) - \sqrt{y^6+1}}{2}}$$

となる、ここでの平方根は正数 y^6+1 に対して正数をとるものとし、立方根

は実数値とする。この α_0 を $(1 + \varepsilon)\omega$ と 0 を結ぶ線分に沿って解析接続し、

$$x = -\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}$$

の変化を追跡する。 $y = \omega t$ とおいて $t \rightarrow 0$ とすればよい。このとき $\alpha_0 \rightarrow 0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}(\omega t)}{\alpha_0} \right) &= -\omega \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 + 1} - \sqrt{t^6 + 1}} \\ &= -\omega \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{t^3 + 1} + \sqrt{t^6 + 1}}{\sqrt[3]{(t^3 + 1)^2 - (t^6 + 1)}} = -\omega \end{aligned}$$

となる。この道により得られる曲線 $C(\sqrt[3]{2})$ 内の道は $P_0 = (-1, 0)$ と $P_4 = (-\omega, 0)$ を結ぶものとなっている。曲線 $C(\sqrt[3]{2})$ 内の道 γ_{04} と γ_{34} の向きを変えた道 γ_{43} をつないで、 γ_{03} を定める。サイクル A を

$$A = (1 + \rho_2 + \rho_2^2)(\gamma_{03})$$

で定める。

交点数 $B \cdot A$ を計算する。サイクル A は Figure 2 にある y 空間内の道に沿って $x = -\alpha_0 - \frac{\sqrt[3]{2}y}{\alpha_0}$ を接続してできる $C(\sqrt[3]{2})$ の道とホモロジー群の元と等しい。

P_3 と P_6 を結ぶ道で y の値は実数となるが、この道に沿って得られる x 座標の値は実数とならない。従ってサイクル A と B とが交叉する点は P_0 のみで交点数 $B \cdot A$ は 1 である。

Remark 3 $\lambda = 0$ の場合、曲線 $C(\lambda)$ の分岐点が重なるのでサイクルの変形を追跡するのは困難である。この場合も周期積分の挙動は超幾何微分方程式を用いて理解可能である。

4 $C(\lambda)$ 上の正則 1 次形式

曲線 $C(\lambda)$ の種数は 1 なので、 $C(\lambda)$ 上の正則 1 次微分形式 φ は 0 でない定数倍をのぞき一意的に存在する。集合 $U_0 = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_0 \neq 0\}$ 上ではアフィン座標 $(x, y) = (t_1/t_0, t_2/t_0)$ を用いて $C^\circ(\lambda)$ を

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0\}$$

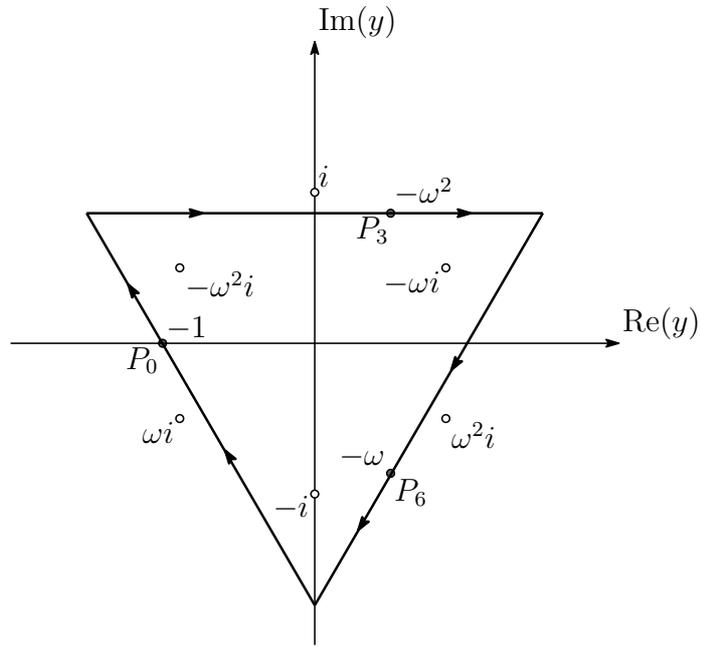


Figure 2: cycle A

と表示できる。正則 1 次微分形式は、座標 (x, y) により

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{3dx}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = \frac{dx}{y^2 - \lambda x} \\ &= -\frac{3dy}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}} = -\frac{dy}{x^2 - \lambda y}\end{aligned}$$

で与えられる。 $C(\lambda)$ の自己同型 ρ_1, ρ_2 により、

$$\rho_1(x, y) = \rho_1(t_1/t_0, t_2/t_0) = (t_0/t_2, t_1/t_2) = (1/y, x/y),$$

$$\rho_2(x, y) = \rho_2(t_1/t_0, t_2/t_0) = (\omega t_1/t_0, \omega^2 t_2/t_0) = (\omega x, \omega^2 y),$$

に変化する。したがって

$$\rho_1^*(\varphi) = \frac{-dy/y^2}{(x/y)^2 - \lambda(1/y)} = \varphi,$$

$$\rho_2^*(\varphi) = \frac{\omega dx}{(\omega^2 y)^2 - \lambda(\omega x)} = \varphi,$$

であり、どちらの作用に関しても不変である。

また、 φ の局所座標系 x (あるいは y) を用いた表示をみれば、 φ に零点がないことも容易にわかる。

5 $C(\lambda)$ 上の周期積分

曲線 $C(\lambda)$ に対して、正則 1 次形式 φ の積分

$$F(P) = \int_{P_0}^P \varphi$$

を考える。 $F(P)$ は $C(\lambda)$ 上の局所正則関数であり φ には零点がないことから $C(\lambda)$ と \mathbb{C} との局所双正則写像である。曲線 $C(\lambda)$ には自明でないサイクルが存在するので $L = \mathbb{Z} \int_A \varphi + \mathbb{Z} \int_B \varphi$ 分の多価性がある。 F を $C(\lambda)$ から \mathbb{C}/L への正則写像とみなすことができる。

Fact 1 任意の $\lambda \in \mathbb{C} - \{1, \omega, \omega^2\}$ に対して $\int_A \varphi, \int_B \varphi$ は 0 にはならず $\int_A \varphi / \int_B \varphi$ の虚部は正である。

Proof. 曲線 $C(\lambda)$ をサイクル A, B に沿って切り開くと境界が B^+, A^+, B^-, A^- の四角形 X が得られる。ここで A^+, B^+ は X の境界と A, B の向きが一致し、 A^-, B^- は X の境界と A, B の向きが反対となっている。このように切り開けるためには交点数 $B \cdot A = 1$ であることを用いている。Stokes 定理より

$$\iint_X d(F\bar{\varphi}) = \int_{\partial X} F\bar{\varphi} \quad (2)$$

が成立する。等式 (2) の左辺は

$$\iint_X d(F\varphi) = \iint_X \varphi \wedge \bar{\varphi} = \iint_X |\varphi(x)|^2 dx \wedge \bar{dx}$$

であり、虚部が負の純虚数である。等式 (2) の右辺は

$$\int_{\partial X} F\bar{\varphi} = \int_{B^+ + A^+ + B^- + A^-} F\bar{\varphi}$$

であるが、 B^- での関数 $F(B^-)$ の値と B^+ での関数 $F(B^+)$ の値は、積分 $\int_{A^+} \varphi = \int_A \varphi$ だけ分の違いが生じている。同様に A^- での関数 $F(A^-)$ の値

と A^+ での関数 $F(A^+)$ の値は、積分 $\int_{B^-} \varphi = -\int_B \varphi$ だけ分の違いが生じている。従って

$$\begin{aligned} \int_{B^++A^++B^-+A^-} F\bar{\varphi} &= \int_{A^++A^-} F\bar{\varphi} + \int_{B^++B^-} F\bar{\varphi} \\ &= \int_{A^+} [F - (F - \int_B \varphi)]\bar{\varphi} + \int_{B^+} [F - (F + \int_A \varphi)]\bar{\varphi} \\ &= \int_B \varphi \int_A \bar{\varphi} - \int_A \varphi \int_B \bar{\varphi} \end{aligned}$$

を得る。この値が虚部が負の純虚数なので $\int_A \varphi, \int_B \varphi$ は 0 でなく

$$\operatorname{Im}\left(\int_A \varphi / \int_B \varphi\right) = \frac{1}{2i|\int_B \varphi|^2} \left(\int_A \varphi \int_B \bar{\varphi} - \int_B \varphi \int_A \bar{\varphi} \right) > 0$$

をみたす。 □

$\int_A \varphi$ と $\int_B \varphi$ の比 $\tau = \int_A \varphi / \int_B \varphi \in \mathbb{H}$ を $\mathbb{C}(\lambda)$ の基本周期といい、 $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ を $\mathbb{C}(\lambda)$ の周期格子という。

Fact 2 写像

$$F : \mathbb{C}(\lambda) \ni P \mapsto \int_{P_0}^P \varphi / \int_B \varphi \in \mathbb{C}/L$$

は複素多様体として同型写像である。

Proof. 写像 F は複素多様体 $\mathbb{C}(\lambda)$ から複素多様体 \mathbb{C}/L への正則写像で、局所的には正則同型写像である。示すべきことは、 F が全射であることと単射であることである。

• F の全射性

F の連続性により compact 集合 $C(\lambda)$ の F による像 $F(C(\lambda))$ は compact 集合である。Hausdorff 空間内では compact 集合は閉集合なので、 $F(C(\lambda))$ は閉集合である。一方、開写像定理より $F(C(\lambda))$ は開集合である。 \mathbb{C}/L は連結なので $F(C(\lambda))$ は \mathbb{C}/L と一致する。

• F の単射性

F が全射であることと局所正則同型であることより \mathbb{C} の各点で F の逆写像 F^{-1} が局所的には定義できる。 \mathbb{C} は単連結なので一価性定理より逆写像 F^{-1} は \mathbb{C} 全体で一価正則な写像となる。この写像が \mathbb{C}/L 上で一価正則な写像となっていることは、 L の元 $p\tau + q$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) 分のずれは、 $C(\lambda)$ 内の曲線 $pA + qB$ での積分として実現できることから保証される。 □

変曲点 P_0 と P_2 を結ぶ道 $\gamma_{0,2}$ を $\gamma_{0,1}$ と $\rho_1(\gamma_{0,1})$ をつないだ道として定める。 P_0 と P_4 を結ぶ道 $\gamma_{0,4}$ を $\gamma_{0,3}$ と $\rho_2(\gamma_{0,1})$ をつないだ道、 P_0 と P_5 を結ぶ道 $\gamma_{0,5}$ を $\gamma_{0,3}$ と $\rho_2(\gamma_{0,2})$ をつないだ道、 P_0 と P_6 を結ぶ道 $\gamma_{0,6}$ を $\gamma_{0,3}$ と $\rho_2(\gamma_{0,3})$ をつないだ道、 P_0 と P_7 を結ぶ道 $\gamma_{0,7}$ を $\gamma_{0,6}$ と $\rho_2(\gamma_{0,1})$ をつないだ道、 P_0 と P_8 を結ぶ道 $\gamma_{0,8}$ を $\gamma_{0,6}$ と $\rho_2(\gamma_{0,2})$ をつないだ道で定める。

正則 1 次形式 φ の変曲点 P_0 と P_1 を結ぶ道 $\gamma_{0,1}$ を ρ_1 で移した道 $\rho_1(\gamma_{0,1})$ 上の積分は、変数変換の公式より

$$\int_{\rho_1(\gamma_{0,1})} \varphi = \int_{\gamma_{0,1}} \rho_1^*(\varphi) = \int_{\gamma_{0,1}} \varphi$$

となる。サイクル B は $(1 + \rho_1 + \rho_1^2)(\gamma_{0,1})$ だったので

$$\int_{\gamma_{0,1}} \varphi = \frac{1}{3} \int_B \varphi$$

となる。同様に

$$\int_{\gamma_{0,3}} \varphi = \frac{1}{3} \int_A \varphi$$

となり、正則 1 次形式 φ の P_0 と P_{3k+j} を結ぶ道 $\gamma_{0,3k+j}$ ($j, k = 0, 1, 2$) 上の積分は

$$\int_{\gamma_{0,3k+j}} \varphi = \frac{k}{3} \int_A \varphi + \frac{j}{3} \int_B \varphi$$

となる。

6 周期のみたす微分方程式

超幾何級数は

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

で定義される、ここで変数 z は $|z| < 1$ をみたし a, b, c は複素パラメーターで $c \neq 0, -1, -2, \dots$ とする。超幾何級数 $F(a, b, c; z)$ は超幾何微分方程式

$$E(a, b, c) : z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} f(z) - \{c - (a+b+1)z\} \frac{d}{dz} f(z) - abf(z) = 0$$

をみたく。変数 z に λ^3 を代入して得られる関数 $h(\lambda) = F(a, b, c; \lambda^3)$ のみたく微分方程式を求め。合成関数の微分法より

$$\frac{d}{d\lambda}h(\lambda) = 3\lambda^2 \frac{d}{dz}f(z), \quad \frac{d^2}{d\lambda^2}h(\lambda) = 6\lambda \frac{d}{dz}f(z) + 9\lambda^4 \frac{d^2}{dz^2}f(z),$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}f(z) &= \frac{1}{3\lambda^2} \frac{d}{d\lambda}h(\lambda), \\ \frac{d^2}{dz^2}f(z) &= \frac{1}{9\lambda^4} \frac{d^2}{d\lambda^2}h(\lambda) - \frac{2}{9\lambda^5} \frac{d}{d\lambda}h(\lambda), \end{aligned}$$

と表示できる。したがって $h(x)$ は微分方程式

$$\begin{aligned} \lambda^3(1 - \lambda^3) \left[\frac{1}{9\lambda^4} \frac{d^2}{d\lambda^2}h(\lambda) - \frac{2}{9\lambda^5} \frac{d}{d\lambda}h(\lambda) \right] \\ + \{c - (\alpha + b + 1)\lambda^3\} \left[\frac{1}{3\lambda^2} \frac{d}{d\lambda}h(\lambda) \right] - abh(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

をみたく。この方程式を整理すると

$$\lambda(1 - \lambda^3) \frac{d^2}{d\lambda^2}h(\lambda) + \{(3c - 2) - (3a + 3b + 1)\lambda^3\} \frac{d}{d\lambda}h(\lambda) - 9ab\lambda^2h(\lambda) = 0$$

が得られる。とくに $c = 2/3$ の場合、

$$H(a, b) : (1 - \lambda^3) \frac{d^2}{d\lambda^2}h(\lambda) - (3a + 3b + 1)\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}h(\lambda) - 9ab\lambda h(\lambda) = 0,$$

となり、 $\lambda = 1, \omega, \omega^2, \infty$ を確定型の特異点とするので、 $H(a, b)$ は Heun 型微分方程式である。

Proposition 1 曲線 $C(\lambda)$ の周期 $\int_A \varphi, \int_B \varphi$ を λ の関数とみなしたとき、それらは微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ をみたく。

Proof. 曲線 $C(\lambda)$ は $f = f(\lambda; x, y) = x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0$ なので $df = f_x dx + f_y dy = 0$ をみたく dy は

$$dy = -\frac{f_x}{f_y} dx = -\frac{x^2 - \lambda y}{y^2 - \lambda x} dx.$$

と表示できる。微分形式 $\frac{dx}{y^2-\lambda x}$ のサイクル A (あるいは B) での積分を $p(\lambda)$ で表す。曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型 1-form $\psi dx = \psi(\lambda; x, y)dx$ をサイクル A で積分したものを λ の関数とみなしたときに λ での微分がどうなるかを考える。曲線族 $\{C(\lambda)\}_\lambda$ に対する $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ の局所自明性より、

$$\frac{d}{d\lambda} \int_A \psi(\lambda; x, y) dx = \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi + \frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right\} dx,$$

となる、ここで変数 y を方程式 $f(\lambda; x, y) = 0$ により定まる λ と x による陰関数とみなす。方程式 $f(\lambda; x, y) = x^3 + y(\lambda, x)^3 - 3\lambda xy(\lambda, x) = 0$ の両辺を λ で微分すると

$$3y(\lambda, x)^2 \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda} - 3xy(\lambda, x) - 3\lambda x \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda} = 0$$

となり、これを整理すると

$$\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda} = \frac{xy(\lambda, x)}{y^2(\lambda, x) - \lambda x}$$

を得る。つまり

$$\frac{d}{d\lambda} \int_A \psi(\lambda; x, y) dx = \int_A \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{xy}{y^2 - \lambda x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \right\} dx$$

となる。この式を利用して

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} p(\lambda) &= \int_A \frac{-x(y^2 + \lambda x)}{(y^2 - \lambda x)^3} dx, \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} p(\lambda) &= \int_A \frac{2\lambda x^3(5y^2 + \lambda x)}{(y^2 - \lambda x)^5} dx, \end{aligned}$$

が得られるので

$$[(1 - \lambda^3) \frac{d^2}{d\lambda^2} - 3\lambda^2 \frac{d}{d\lambda} - \lambda] p(\lambda) = \lambda \int_{c(\lambda)} \eta(\lambda; x, y) dx,$$

となる、ここで

$$\eta(\lambda; x, y) = \frac{2\lambda x^4 - (9\lambda^3 - 10)x^3 y^2 - 9\lambda^2 x^2 y^4 + 7\lambda x y^6 - y^8}{(y^2 - \lambda x)^5}$$

とする。曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型 1-形式 $\eta(\lambda; x, y)$ は完全微分形式である。実際、 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 $F = \frac{(x^3-1)xy}{(y^2-\lambda x)^3}$ に対して dF は

$$\frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x^2 - \lambda y}{y^2 - \lambda x} \frac{\partial}{\partial y} \right) F \right\} dx,$$

であり、 $\eta + dF$ は

$$\frac{\lambda x^4 + 5x^3 y^2 + 3\lambda^2 x^2 y + 4\lambda x y^3 - y^5}{(y^2 - \lambda x)^5} f(\lambda; x, y) dx,$$

なので $C(\lambda)$ 上では 0 となる。 □

超幾何級数の Euler 積分表示

$$\begin{aligned} F(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a} (1-zt)^{-b} \frac{dt}{t(1-t)} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^\infty t^{b-c} (t-1)^{c-a} (t-z)^{-b} \frac{dt}{t-1} \end{aligned}$$

を用いて、曲線 $C(\lambda)$ の周期が微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ の解であることを示すこともできる。

Theorem 1 $|\lambda| < 1$ に対して

$$\int_B \frac{dy}{x^2 - \lambda y} = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right) - \lambda B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right)$$

が成立する。

Proof. 変数 λ は $\sqrt[3]{2}$ の近くの実数値を動くものとし、 $0 < \lambda < 1$ をみたとしているとする。この範囲で定理の等式が成立すれば、一致の定理より $|\lambda| < 1$ 全体でも有効となる。

方程式 $x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0$ に対して、 $x = -u - v$, $\lambda y = uv$ で変数変換すると方程式

$$u^3 v^3 - \lambda^3 (u^3 + v^3) + \lambda^3 = 0$$

が得られる。この方程式で定まる曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ は

$$v^3 = \lambda^3 \frac{u^3 - 1}{u^3 - \lambda^3} \tag{3}$$

とも表示できる。曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ は $C(\lambda)$ の 2 重被覆であり、写像

$$j: \tilde{C}(\lambda) \ni (u, v) \mapsto (x, y) = \left(-u - v, \frac{uv}{\lambda}\right) \in C(\lambda)$$

の分岐点は $u = v$ となるところであり、6 次方程式 $u^6 - 2\lambda^3 u^3 + \lambda^3 = 0$ の解 $\alpha_1, \dots, \alpha_6$

$$\alpha_j^3 = \lambda^3 \pm \sqrt{\lambda^3(\lambda^3 - 1)}$$

を用いて $(u, v) = (\alpha_j, \alpha_j)$ ($j = 1, \dots, 6$) となっている。

曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ 内の点 (u, v) に対して、変数 u が开区間 $(1, \infty)$ を動くとき、それにともない v^3 は开区間 $(0, \lambda^3)$ 内を単調に増加していく。そこで $\tilde{C}(\lambda)$ 内の路 $\tilde{\gamma}$ を u が $(1, \infty)$ を動き、それに対応する v として実数値のものを選ぶことで構成されるものとする。写像 j による $\tilde{\gamma}$ の像を調べる。路 $\tilde{\gamma}$ 内の点 (u, v) に対して、 v は u の単調増加関数とみなせたので、 $y = uv/\lambda$ も u の単調増加関数である。 $u \rightarrow 1$ のとき $v \rightarrow 0$ となり $u \rightarrow \infty$ のとき $v \rightarrow \lambda$ なので $y = uv/\lambda$ はすべての正の実数をとる。このとき $x = -u - v$ は単調に減少し开区間 $(-\infty, -1)$ の全ての値をとる。従って $j(\tilde{\gamma})$ は P_1 と P_2 を結ぶ路 $\rho_1(\gamma_{0,1})$ である。

曲線 $C(\lambda)$ 上の正則 1 次微分形式 $\frac{dy}{x^2 - \lambda y}$ を $\tilde{C}(\lambda)$ に引き戻すと、

$$u^2(v^3 - \lambda^3)du + v^2(u^3 - \lambda^3)dv = 0$$

と (3) により

$$j^*\left(\frac{dy}{x^2 - \lambda y}\right) = \frac{\lambda^2(u - v)du}{(u^3 - \lambda^3)v^2}$$

となる。置換積分の公式より

$$\int_B \frac{dy}{x^2 - \lambda y} = 3 \int_{\rho_1(\gamma_{0,1})} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} = 3 \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\lambda^2(u - v)du}{(u^3 - \lambda^3)v^2}$$

である。積分路 $\tilde{\gamma}$ 上では $u - 1 > 0$, $u - \lambda > 0$, $0 < v < \lambda$ であり

$$v = \lambda(u^3 - 1)^{\frac{1}{3}}(u^3 - \lambda^3)^{-\frac{1}{3}}$$

である、ここで 3 乗根はすべて正の実数値でとるものとする。ゆえに

$$\begin{aligned} & 3 \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\lambda^2(u - v)du}{(u^3 - \lambda^3)v^2} \\ &= 3 \int_1^\infty u(u^3 - 1)^{-\frac{2}{3}}(u^3 - \lambda^3)^{-\frac{1}{3}}du - 3\lambda \int_1^\infty (u^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}(u^3 - \lambda^3)^{-\frac{2}{3}}du \end{aligned}$$

である。さらに $u^3 = t$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
& 3 \int_1^\infty u(u^3 - 1)^{-\frac{2}{3}}(u^3 - \lambda^3)^{-\frac{1}{3}} du - 3\lambda \int_1^\infty (u^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}(u^3 - \lambda^3)^{-\frac{2}{3}} du \\
&= \int_1^\infty t^{-\frac{1}{3}}(t - 1)^{\frac{1}{3}}(t - \lambda^3)^{-\frac{1}{3}} \frac{dt}{t - 1} - \lambda \int_1^\infty t^{-\frac{2}{3}}(t - 1)^{\frac{2}{3}}(t - \lambda^3)^{-\frac{2}{3}} \frac{dt}{t - 1} \\
&= B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right) - \lambda B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right)
\end{aligned}$$

が得られる。 □

超幾何級数より得られる λ 関数 $F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right)$ は微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ の解である。 z の関数 $z^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z)$ も超幾何微分方程式 $E(a, b, c)$ の解であることから $\lambda F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right)$ も微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ の解である。 サイクルが変わってもみたす微分方程式は変わらないので、曲線 $C(\lambda)$ の周期は微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ の解である。

Remark 4 $\lambda \neq 0, 1, \omega, \omega^2$ ならば $\tilde{C}(\lambda)$ は $C(\lambda)$ の 6 点で分岐する 2 重被覆なのでその種数は 4 である。 また、(3) により、 $\tilde{C}(\lambda)$ を変数 u の空間である \mathbb{P}^1 の 6 点 $1, \omega, \omega^2, \lambda, \omega\lambda, \omega^2\lambda$ で分岐する 3 重被覆とみなすことができる。 曲線 $C(\lambda)$ 上の正則 1 次微分形式 $\frac{dy}{x^2 - \lambda y}$ の $\tilde{C}(\lambda)$ への引き戻し

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2(u - v)du}{(u^3 - \lambda^3)v^2} &= \frac{\lambda^2 u du}{(u^3 - \lambda^3)v^2} + \frac{\lambda^2 v dv}{(v^3 - \lambda^3)u^2} \\
&= u(u^3 - 1)^{-2/3}(u^3 - \lambda^3)^{-1/3} du + v(v^3 - 1)^{-2/3}(v^3 - \lambda^3)^{-1/3} dv
\end{aligned}$$

は $\tilde{C}(\lambda)$ 上の *involution*

$$\tilde{C}(\lambda) \ni (u, v) \mapsto (v, u) \in \tilde{C}(\lambda)$$

の作用で不変である。 曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ の *Prym variety* への *Abel-Jacobi map* の挙動はどうなっているのだろうか？

Remark 5 変数変換

$$u^3 = z, \quad uv = \lambda w$$

により、曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ は

$$\lambda^3 w^3 - \lambda^3 \left(z + \frac{\lambda^3 w^3}{z}\right) + \lambda^3 = 0,$$

つまり

$$\hat{C}(\lambda) : w^3 = \frac{z(z-1)}{z-\lambda^3}$$

に変換される。曲線 $\hat{C}(\lambda)$ は変数 z の空間である \mathbb{P}^1 の 4 点 $0, 1, \lambda^3, \infty$ で分岐する 3 重被覆なので、その種数は 2 である。曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ は $\hat{C}(\lambda)$ の分岐点のない 3 重被覆である。定理の証明は曲線 $C(\lambda)$ 上の積分を曲線 $\hat{C}(\lambda)$ 上の積分へ変換できることに基づいている。

曲線 $\hat{C}(\lambda)$ は超楕円曲線なので、固定点が 6 点ある involution が存在するが固定点が 2 点しかない involution ι も存在する。実際

$$\iota : \hat{C}(\lambda) \ni (z, w) \mapsto \left(\frac{\lambda^3}{z}, \frac{1}{w}\right) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

とすると

$$\frac{\frac{\lambda^3}{z}(\frac{\lambda^3}{z}-1)}{\frac{\lambda^3}{z}-\lambda^3} = \frac{\lambda^3-z}{z(1-z)} = \left(\frac{1}{w}\right)^3$$

をみtasので ι は $\hat{C}(\lambda)$ への写像である。写像 ι の固定点は容易に求めることができる。写像 ι の定義より、 ι の固定点の z -座標は $\pm\lambda^{3/2}$ である。 z -座標がその値をとるとき $w^3 = -1$ となるが、 $w \mapsto 1/w$ で固定されるのは -1 のみである。ゆえに $(z, w) = (\pm\lambda^{3/2}, -1)$ の 2 点が ι の固定点である。

分岐点の個数より $\hat{C}(\lambda)/\iota$ の種数は 1 となる。曲線 $\hat{C}(\lambda)/\iota$ の定義式と J -不変量を求める。等式

$$w^3 + \frac{1}{w^3} = \frac{z(z-1)}{z-\lambda^3} + \frac{z-\lambda^3}{z(z-1)}$$

に対して変数変換

$$u = z + \frac{\lambda^3}{z} - (1 + \lambda^3), \quad v = w + \frac{1}{w} - 2$$

を行うと

$$(v+3)^2 vu = (u + \lambda^3 - 1)^2$$

が得られる。さらなる変数変換

$$t = \frac{u + \lambda^3 - 1}{v + 3}, \quad \text{i.e. } u = t(v+3) - \lambda^3 + 1$$

により、 t, v の非特異 3 次曲線

$$v(v+3)t - (\lambda^3 - 1)v = t^2$$

が得られる。

この曲線上の一般の点 (t, v) に対して、変数 u の値が一意的に定まる。変数 u の値から $z, \lambda^3/z$ の値が得られ、変数 v の値から $w, 1/w$ の値が得られる。これらの値より $(z, w), (\lambda^3/z, 1/w), (\lambda^3/z, w), (z, 1/w), (\lambda^3/z, w)$ を構成すると前者の 2 点のみが $\hat{C}(\lambda)$ に属するので、この曲線により $\hat{C}(\lambda)/\iota$ は表現される。

この 3 次曲線の J -不変量を求める。変数 v を固定するごとに t の 2 次方程式が得られるので、この 3 次曲線は v -空間の 2 重被覆とみなせる。分岐点は t の 2 次方程式とみなしたときの判別式が 0 となるところなので

$$D = v^2(v+3)^3 - 4(\lambda^3 - 1)v = v(1 + 6v + 9v^2 + 4(1 - \lambda^3)v^3) = 0$$

である。 $v = 0$ を無限遠点に移し、残りの 3 次方程式を変数を変換することで

$$4(v')^3 - g_2v' - g_3 = 0,$$

の形に変換される、ここで

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{3(1 + 8\lambda^3)}{4(\lambda^3 - 1)^2} \\ g_3 &= \frac{(2\lambda^2 + 2\lambda - 1)(4\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{8(\lambda^3 - 1)^3} \end{aligned}$$

である。従ってこの 3 次曲線の J -不変量は

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = -\frac{(2^3\lambda^3 + 1)^3}{64\lambda^3(\lambda^3 - 1)^3}$$

である。この J -不変量におけるパラメーター λ を $1/\lambda$ とすると、もとの Hesse 標準形 $C(\lambda)$ の J -不変量と一致する。

Remark 6 *Gamma* 関数の反転公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

に $z = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。従って

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})^3}{2\pi}$$

である。一方、

$$\Gamma(\frac{1}{3})^3 = 2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}\pi \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

であることが知られているので

$$B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = 3 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}} = 3\sqrt[3]{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

である。

Remark 7 文献 [Hu] に記載されているように、変数変換

$$z = xy, \quad w = y^3$$

により、曲線 $C(\lambda) : x^3 + y^3 + 1 - 3\lambda xy = 0$ が

$$C'(\lambda) : z^3 + w^2 + w - 3\lambda zw = 0$$

に変換される。曲線 $C'(\lambda)$ は座標変換により

$$w^2 = 4z^3 - \frac{3}{4}\lambda(9\lambda^3 - 8)z - \frac{27}{8}\lambda^6 + \frac{9}{2}\lambda^3 - 1$$

の Weierstrass の標準形に変形できる。曲線 $C'(\lambda)$ の J -不変量は

$$J(C'(\lambda)) = \frac{\lambda^3(9\lambda^3 - 8)^3}{64(\lambda^3 - 1)}$$

である。この変換は平面 3 次曲線 $C(\lambda)$ と $C'(\lambda)$ との 3 次不分岐被覆

$$C(\lambda) \ni (x, y) \mapsto (z, w) = (xy, y^3) \in C'(\lambda)$$

を誘導している。

Theorem 2 $|\lambda| < 1$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{dy}{x^2 - \lambda y} \\ &= (\omega - 1)B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3) + (1 - \omega^2)\lambda B(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3) \end{aligned}$$

が成立する。

Proof. λ を $\sqrt[3]{2}$ の近くの実数とする。前定理を λ が $\omega\lambda$ の場合に適応すると

$$\int_{B_{\omega\lambda}} \frac{dy}{x^2 - \omega\lambda y} = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right) - \omega\lambda B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right)$$

が成立する。ここでの B サイクルはやはり $P_0 = (0, -1)$ と $P_1 = (-1, 0)$ を結ぶ道を $1 + \rho_1 + \rho_1^2$ で変換したものであり、

$$\int_{B_{\omega\lambda}} \frac{dy}{x^2 - \omega\lambda y} = 3 \int_{-1}^0 \frac{dy}{x(\lambda, y)^2 - \omega\lambda y}$$

が成立している、ここで $x(\lambda, y)$ は x を λ, y で表示した関数であり、 λ が $\sqrt[3]{2}$ の場合に作成したものを解析接続したものである。ただし、ここでの $P_0 = (0, -1)$ と $P_1 = (-1, 0)$ を結ぶ道を y -座標へ射影したものは開区間 $(-1, 0)$ とは異なっている。パラメーター λ が原点中心半径 $\sqrt[3]{2}$ の円上を $\sqrt[3]{2}$ から $\sqrt[3]{2}\omega$ へ変化していく際に y -座標が局所座標として採用できない6点 η_1, \dots, η_6

$$\eta_j = \sqrt[3]{2\lambda^3 - 1 \pm \sqrt{\lambda^3(\lambda^3 - 1)}}$$

が下記の図のように動き、道の変形を引き起こす。その結果 $B_{\omega\lambda}$ を構成する P_0 から P_1 に至る道 γ_{01} は Figure 1 における道で y -座標を与えるものに変化する。

曲線 $C(\omega\lambda)$ から $C(\lambda)$ への写像

$$\iota : C(\omega\lambda) \ni (x', y') \ni (x', y') \mapsto (x, y) = (\omega x', y') \in C(\lambda)$$

に対して、 $\iota(P_0) = P_0$, $\iota(P_1) = P_4$ であり $C(\omega\lambda)$ 上の γ_{01} の ι による像は $C(\lambda)$ 上の P_0 と P_4 を結ぶ道 γ_{04} になっている。一方、 $\frac{dy}{x^2 - \lambda y}$ の ι による引き戻しは

$$\iota^* \left(\frac{dy}{x^2 - \lambda y} \right) = \frac{\omega dy'}{(x')^2 - \omega\lambda y'}$$

となるので

$$\begin{aligned} 3 \int_{\gamma_{04}} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} &= \int_{\iota(\gamma_{01})} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} = 3 \int_{\gamma_{01}} \iota^* \left(\frac{dy}{x^2 - \lambda y} \right) \\ &= 3 \int_{\gamma_{01}} \frac{\omega dy'}{(x')^2 - \omega\lambda y'} \\ &= \omega B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right) - \omega^2 \lambda B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right) \end{aligned}$$

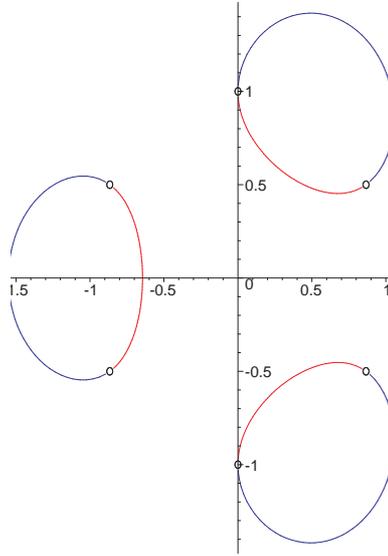


Figure 3: η_1, \dots, η_6 の動き

となる。 γ_{04} と P_4 と P_3 を結ぶ道 γ_{43} をつないで道 γ_{03} をつくり $1 + \rho_2 + \rho_2^2$ の作用で A サイクルを構成したが、 γ_{43} は $-\rho_1(\gamma_{01})$ であった。従って

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dy}{x^2 - \lambda y} &= 3 \int_{\gamma_{03}} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} = 3 \int_{\gamma_{04} - \gamma_{34}} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} \\ &= 3 \int_{\gamma_{04}} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} - 3 \int_{\gamma_{01}} \frac{dy}{x^2 - \lambda y} \\ &= (\omega - 1)B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3\right) + (1 - \omega^2)\lambda B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3\right) \end{aligned}$$

を得る。 □

7 周期の monodromy 群

$\mathbb{C} - \{1, \omega, \omega^2\}$ の変数 λ に対して、写像

$$F : \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

は、局所的には 1 価だが大域的には多価写像である。 $\int_A \varphi, \int_B \varphi$ が 2 階の線型方程式をみたしているので、その多価性を表す monodromy 群は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である。さらに、局所自明性により接続されていくサイクル A, B は、ずっと交点数 $B \cdot A = 1$ をみたす $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ の元たちなので、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群となることもわかる。サイクルの変形を追跡することで monodromy 群を決定することも可能であるが、ここでは超幾何微分方程式の monodromy 表現を用いて $C(\lambda)$ の周期の monodromy 群を決定する。

Fact 3 (Theorem 6.1 in [Ki]) パラメーター $a, b, c - a, c - b$ のいずれもが整数でないならば超幾何微分方程式 $E(a, b, c)$ の基本解 $f(z) = \begin{pmatrix} f_0(z) \\ f_1(z) \end{pmatrix}$ で monodromy 群の生成元が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1 - e^{-2\pi ib}) & e^{-2\pi ic} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-2\pi ia} \\ 0 & e^{-2\pi i(a+b-c)} \end{pmatrix}.$$

となるものが存在する。これらの行列はそれぞれ点 $z = 0$ を正の向きに一回まわるループと点 $z = 1$ を正の向きに一回まわるループに沿う基本解 $f(z)$ の解析接続で得られる。

Fact 3 にある行列に $c = 2/3$ を代入すると

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1 - e^{-2\pi ib}) & \omega \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-2\pi ia} \\ 0 & \omega^2 e^{-2\pi i(a+b)} \end{pmatrix}.$$

となる。行列 ρ_0 の固有値は 1 と ω であり、 $\rho_0^3 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

Proposition 2 パラメーター $a, b, 2/3 - a, 2/3 - b$ のいずれもが整数でないならば、 $H(a, b)$ の基本解で monodromy が

$$\rho_1, \quad \rho_0 \rho_1 \rho_0^{-1}, \quad \rho_0^2 \rho_1 \rho_0^{-2}$$

で生成されるものが存在する。

Proof. このパラメーターに関する条件下で $h(x) = \begin{pmatrix} f_0(x^3) \\ f_1(x^3) \end{pmatrix}$ は $H(a, b)$ の基本解になる。基点 λ_0 を $\sqrt[3]{2}$ とする。実軸に沿って $\lambda = 1 - \varepsilon$ まで行き、点 $\lambda = 1$ を正の向きに 1 回まわり実軸に沿ってもどる基点 λ_0 のループを v_1 とする。変数 λ がループ v_1 に沿って動くとき $z = \lambda^3$ は $z = 1$ を正の向きに

1回まわる。したがって、ループ v_1 に沿う解析接続により $h(\lambda)$ は $\rho_1 h(\lambda)$ に変化する。

ループ v_ω を $(\nu_1^\omega(\varepsilon)) \cdot (\omega v_1) \cdot (\nu_1^\omega(\varepsilon))^{-1}$ で定める、ここで $\nu_1^\omega(\varepsilon)$ は中心が原点で正数 ε から $\omega\varepsilon$ へ至る円弧とし、 ωv_1 は写像 $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \omega\lambda \in \mathbb{C}$ による v_1 の像とする。変数 λ が円弧 $\nu_1^\omega(\varepsilon)$ に沿って動くとき $z = \lambda^3$ は $z = 0$ の周りを正の向きに1回まわるので、この道に沿って λ が動くとき $h(\lambda)$ は $\rho_0 h(\lambda)$ に変化する。したがって、ループ v_ω に沿う解析接続では $h(\lambda)$ は $\rho_0 \rho_1 \rho_0^{-1} h(\lambda)$ に変化する。

同様に点 $\lambda = \omega^2$ を回るループ v_{ω^2} を定めれば、このループに沿う解析接続により $h(\lambda)$ は $\rho_0^2 \rho_1 \rho_0^{-2} h(\lambda)$ に変化する。

空間 $\mathbb{C} - \{1, \omega, \omega^2\}$ の基本群は3つのループ v_1, v_ω and v_{ω^2} で生成される自由群なので、基本解 $h(\lambda)$ に関する monodromy 群は $\rho_1, \rho_0 \rho_1 \rho_0^{-1}, \rho_0^2 \rho_1 \rho_0^{-2}$ で生成される。□

パラメーター a, b がともに $1/3$ のとき、微分方程式 $H(1/3, 1/3)$ の基本解 $h(\lambda)$ に対する monodromy 群の生成元は $m_{1+j} = m_0^j m_1 m_0^{-j}$ ($j = 0, 1, 2$) となる、ここで

$$m_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \quad m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \omega^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -1 + \omega^2 & -1 \end{pmatrix}$ による共役 $P m_j P^{-1}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) は

$$\omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

となる。行列 $P m_j P^{-1}$ ($j = 1, 2, 3$) は、レベル3の主合同部分群

$$\Gamma(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a-1, b, c, d-1 \in 3\mathbb{Z} \right\}$$

に属しているが、文献 [Ka] では $\Gamma(3)$ がこれらの元で生成される自由群であることが基本領域を与えることで示されている。

Remark 8 文献 [Ka] での生成元は T^3, ST^3S, TST^3ST^{-1} となっている、ここで $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。しかし ST^3S, TST^3ST^{-1} は -1 をかけるか $ST^3S^{-1}, TST^3S^{-1}T^{-1}$ としないと $\Gamma(3)$ には属さない。このように修正するとこの論文で得られた生成元たちの逆行列となっている。

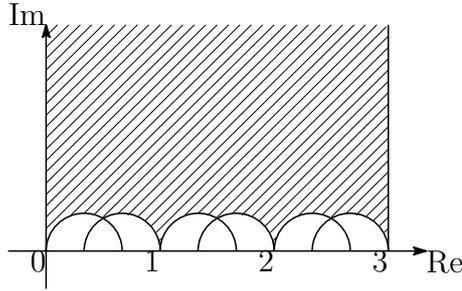


Figure 4: $\Gamma(3)$ の基本領域

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ で生成される群は、合同群

$$\Gamma_0(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a-1, c, d-1 \in 3\mathbb{Z} \right\}$$

と共役である。実際、 $\Gamma(3)$ は $GL_2(\mathbb{Z})$ の正規部分群で $\Gamma_0(3)/\Gamma(3) \simeq \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ であって、共役 $(QP)m_0(QP)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ は $\Gamma_0(3)$ に属する、ここで $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ である。

以上より下記の可換な図式が得られる

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{0, 1, \omega, \omega^2\} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathbb{H}/\Gamma(3) \\ \wr \downarrow & & pr \downarrow \\ \mathbb{C} - \{0, 1\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}/\Gamma_0(3), \end{array}$$

ここで \mathbb{H} は上半空間、写像 \wr は $\lambda \mapsto z = \lambda^3$ 、写像 pr は自然な射影、写像 \tilde{h} と \tilde{f} はそれぞれ基本解 $(QP)h(\lambda)$ と $(QP)f(z)$ に対して2つの解の比をとるものとする。

超幾何関数の接続公式を用いて monodromy 群の生成元を求めることもできる。

Fact 4 ([MS3Y], Section 4.1) パラメーター c と $c - a - b$ がともに整数でないとし、

$$\begin{aligned} U_0 &= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1, z \notin (-1, 0) \subset \mathbb{R}\} \\ U_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |1 - z| < 1, z \notin (1, 2) \subset \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

とする。超幾何微分方程式 $E(a, b, c)$ の U_0 上の基本解 \mathbf{f}_0 と U_1 上の基本解 \mathbf{f}_1 は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \begin{pmatrix} F(a, b, c; z) \\ z^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_1 &= \begin{pmatrix} F(a, b, a + b - c + 1; 1 - z) \\ (1 - z)^{c-a-b}F(c - a, c - b, c - a - b + 1; 1 - z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

でとれ、 $U_0 \cap U_1$ 上で

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} \mathbf{f}_1$$

をみたす。ただし、开区間 $(0, 1)$ 上における z と $1 - z$ の偏角は 0 とする。

2つの周期 $\int_A \varphi, \int_B \varphi$ は超幾何級数 $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3), \lambda F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3)$ の1次結合

$$\begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \omega & 1 - \omega^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & 0 \\ 0 & B(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \lambda^3) \\ \lambda F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \lambda^3) \end{pmatrix} \quad (4)$$

で表示されていた。変数 λ が $1, \omega, \omega^2$ の周りを回るときに、これらの関数がどう変化するかは $E(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ の U_0 上の基本解 \mathbf{f}_0 と U_1 上の基本解 \mathbf{f}_1 との接続行列と U_1 上の基本解 \mathbf{f}_1 の z が 1 の近傍内で 1 の周りを回ったときの局所 monodromy 行列を求めることにより調べることができる。しかしながら $(a, b, c) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ の場合、 $c - a - b = 0$ となってしまうので Fact 4 での \mathbf{f}_1 は基本解とはならない。そこで別の基本解 \mathbf{f}'_1 とその基本解と \mathbf{f}_0 との接続行列を極限操作 $c \rightarrow a + b$ により与える。

Lemma 1 $c = a + b \notin \mathbb{Z}$ のとき、超幾何微分方程式 $E(a, b, a + b)$ の U_1 上の基本解は

$$\mathbf{f}'_1 = \begin{pmatrix} F(a, b, 1; 1 - z) \\ \log(1 - z)F(a, b, 1; 1 - z) + G(z) \end{pmatrix}$$

$$G(z) = F_a(a, b, 1; 1 - z) + F_b(a, b, 1; 1 - z) + 2F_c(a, b, 1; 1 - z)$$

で与えられる、ここで F_a, F_b, F_c はそれぞれ超幾何級数 $F(a, b, c; z)$ のパラメーター a, b, c に関する偏導関数を表す。

基本解 f'_1 を開区間 $(1, 2)$ に上半空間から解析接続したものを f'_{1+} , 下半空間から解析接続したものを f'_{1-} とすると

$$f'_{1-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} f'_{1+}$$

をみます。また、 U_0 上の基本解は Fact 4 の f_0 に $c = a + b$ を代入したもので得られ、 $U_0 \cap U_1$ 上で

$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{B(a,b)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B(1-a,1-b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} & -1 \\ 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} - \frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)} & -1 \end{pmatrix} f'_1$$

をみます。ただし、開区間 $(0, 1)$ 上における z と $1 - z$ の偏角は 0 とする。

Proof. 2×2 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{c-a-b} \end{pmatrix}$$

に対して、Fact 4 より

$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} P^{-1} P f'_1$$

が成立する。この等式に対して $c \rightarrow a + b$ とするときの極限を考える。左辺は $\begin{pmatrix} F(a, b, a + b; z) \\ z^{1-a-b} F(1 - b, 1 - a, 2 - a - b; z) \end{pmatrix}$ へ収束する。右辺の極限を下記の2つの極限

$$\lim_{c \rightarrow a+b} \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \lim_{c \rightarrow a+b} P f'_1$$

に分割し、前者がこの補題の接続行列へ収束し後者が基本解 f'_1 へ収束することを示す。 P の逆行列が

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & c - a - b \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} P^{-1} \\
= & \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \frac{(c-a-b)\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} + \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} & \frac{(c-a-b)\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} \quad (5)
\end{aligned}$$

である。行列 (5) の (1, 1) 成分は $t = c - a - b$ とおくことにより

$$\begin{aligned}
& \Gamma(t+a+b) \left(\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+b)\Gamma(t+a)} + \frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \right) \\
= & \Gamma(t+a+b) \left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t) + \Gamma(t+a)\Gamma(t+b)\Gamma(-t)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t+a)\Gamma(t+b)} \right) \\
= & \frac{\Gamma(t+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t+a)\Gamma(t+b)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t+1) - \Gamma(t+a)\Gamma(t+b)\Gamma(1-t)}{t}
\end{aligned}$$

である。極限 $t \rightarrow 0$ により

$$\frac{\Gamma(t+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t+a)\Gamma(t+b)} \rightarrow \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} = \frac{1}{B(a,b)\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

となる。また、L'Hôpital 定理により

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(t+1) - \Gamma(t+a)\Gamma(t+b)\Gamma(1-t)}{t} \\
= & \lim_{t \rightarrow 0} [\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma'(t+1) - \frac{d}{dt} \{ \Gamma(t+a)\Gamma(t+b)\Gamma(1-t) \}] \\
= & 2\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma'(1) - \Gamma'(a)\Gamma(b) - \Gamma(a)\Gamma'(b)\Gamma(1)
\end{aligned}$$

となるので、行列 (5) の (1, 1) 成分は $t \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{1}{B(a,b)} \left(2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} \right)$$

に収束する。同様にこの行列の (2, 1) 成分は $t \rightarrow 1$ のとき

$$\frac{1}{B(1-a, 1-b)} \left(2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} - \frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)} \right)$$

に収束する。

行列 (5) の (1, 2) 成分は

$$\frac{(c-a-b)\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{-\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

なので $c \rightarrow a+b$ のときに

$$-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{-1}{B(a,b)}$$

に収束する。同様に行列 (5) の (2, 2) 成分は $c \rightarrow a+b$ のときに

$$-\frac{\Gamma(2-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} = \frac{-1}{B(1-a, 1-b)}$$

に収束する。従って、行列 (5) は $c \rightarrow a+b$ のときに

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{B(a,b)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B(1-a, 1-b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} & -1 \\ 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} - \frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)} & -1 \end{pmatrix}$$

に収束する。

一方

$$Pf_1 = \begin{pmatrix} F(a, b, a+b-c+1; 1-z) \\ -\frac{F(a, b, a+b-c+1; 1-z) + (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z)}{c-a-b} \end{pmatrix}$$

であり、 $c \rightarrow a+b$ のときに第一成分は $F(a, b, 1; 1-z)$ に収束し、第二成分は $t = c - a - b$ とおくと

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-F(a, b, -t+1; 1-z) + (1-z)^t F(t+a, t+b, t+1; 1-z)}{t}$$

であり、 $t \rightarrow 0$ のとき $0/0$ の不定形なので L'Hôpital 定理により

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} [F_c(a, b, -t+1; 1-z) + \log(1-z)(1-z)^t F(t+a, t+b, t+1; 1-z) \\ & \quad + (1-z)^t \frac{d}{dt} F(t+a, t+b, t+1; 1-z)] \\ &= \log(1-z)F(a, b, 1; 1-z) \\ & \quad + F_a(a, b, 1; 1-z) + F_b(a, b, 1; 1-z) + 2F_c(a, b, 1; 1-z) \end{aligned}$$

となる。この解の開区間 (1, 2) への 2 つの接続 $f'_{1\pm}$ の関係は、 $1-z$ の偏角に 2π のずれが生じることから得られる。□

Remark 9 $c = 1, a + b \notin \mathbb{Z}$ のとき、超幾何微分方程式 $E(a, b, 1)$ の U_0 上の基本解は

$$\mathbf{f}'_0 = \begin{pmatrix} F(a, b, 1; z) \\ \log(z)F(a, b, 1; z) + F_a(a, b, 1; z) + F_b(a, b, 1; z) + 2F_c(a, b, 1; z) \end{pmatrix}$$

で与えられる。基本解 \mathbf{f}'_0 を开区間 $(-1, 0)$ に上半空間から解析接続したものを \mathbf{f}'_{0+} , 下半空間から解析接続したものを \mathbf{f}'_{0-} とすると

$$\mathbf{f}'_{0+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f}'_{0-}$$

をみtas。また、 U_1 上の基本解は *Fact 4* 内の \mathbf{f}_1 に $c = 1$ を代入したもので得られ $U_0 \cap U_1$ 上で \mathbf{f}'_0 は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} - \frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)} & 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \end{pmatrix} \mathbf{f}_1$$

と一致する。ただし、开区間 $(0, 1)$ 上における z と $1-z$ の偏角は 0 とする。

Remark 10 $a + b = c = 1, a \notin \mathbb{Z}$ のとき、超幾何微分方程式 $E(a, 1-a, 1)$ の U_0 上の基本解は *Remark 9* の \mathbf{f}'_0 に $b = 1-a$ を代入して得られ、 U_1 上の基本解は *Lemma 1* の \mathbf{f}'_1 に $b = 1-a$ を代入して得られる。それらは $U_0 \cap U_1$ 上で

$$\mathbf{f}'_0 = \frac{\sin \pi a}{\pi} \begin{pmatrix} C^2 + \frac{\Gamma'(a)^2}{\Gamma(a)^2} + \frac{\Gamma'(1-a)^2}{\Gamma(1-a)^2} - \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma''(1-a)}{\Gamma(1-a)} & -1 \\ -C & C \end{pmatrix} \mathbf{f}'_1$$

をみtas。ここで

$$C = 2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)}$$

とし、开区間 $(0, 1)$ 上における z と $1-z$ の偏角は 0 とする。

Theorem 3 曲線 $C(\lambda)$ の2つの周期 $\begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix}$ は λ が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 内で $1, \omega, \omega^2$ へ近づきそれらの点の周りを正の向きに1回まわると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix},$$

に変化する。これらの行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

をみたくす。

Proof. 等式 (4) と Lemma 1 より

$$\begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \omega & 1 - \omega^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\right) & -1 \\ 2\left(\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right) & -1 \end{pmatrix} \mathbf{f}'_1|_{z=\lambda^3}$$

である。 λ が 1 の周りを正の向きに 1 回まわると λ^3 も 1 の周りを正の向きに 1 回まわる。そのとき $\mathbf{f}'_1|_{z=\lambda^3}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f}'_1|_{z=\lambda^3}$$

に変化する。このとき 2 つの周期 $\begin{pmatrix} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{pmatrix}$ には左から

$$(R_1 Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} (R_1 Q)^{-1}$$

がかかることになる、ここで

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 + \omega & 1 - \omega^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\right) & -1 \\ 2\left(\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

とする。行列 Q の行列式は

$$\det(Q) = 2\frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} - 2\frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = 2\frac{\Gamma'(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3}) - \Gamma'(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}$$

である。ガンマ関数の反転公式

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

に $t = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。さらに反転公式の両辺を t で微分すると

$$\Gamma'(t)\Gamma(1-t) - \Gamma(t)\Gamma'(1-t) = -\frac{\pi^2 \cos \pi t}{\sin^2 \pi t}$$

となり、この等式に $t = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\Gamma'\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2\pi^2}{3}$$

となる。ゆえに

$$\det(Q) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。これらを利用して

$$\begin{aligned} & Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi i + \frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} - \frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} & -2\pi i \\ 2\pi i & -2\pi i - \frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} + \frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sqrt{3}i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、さらに

$$R_1 Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

等式 (4) において λ に $\omega\lambda'$ を代入し、Lemma 1 を用いると

$$\left(\begin{array}{c} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{array} \right) \Big|_{\lambda=\omega\lambda'} = R_\omega Q \mathbf{f}'_1 \Big|_{z=(\omega\lambda')^3}$$

となる、ここで

$$R_\omega = R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

である。 λ' が 1 の周りを正の向きに 1 回まわると λ は ω の周りを正の向きに 1 回まわり、 $(\lambda')^3 = \lambda^3$ は 1 の周りを正の向きに 1 回まわる。このとき $\left(\begin{array}{c} \int_A \varphi \\ \int_B \varphi \end{array} \right) \Big|_{\omega\lambda'}$ には左から

$$R_\omega Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} R_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

がかかる。

λ が ω^2 の周りをまわるときの変化では R_ω の代わりに

$$R_{\omega^2} = R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

を用いればよい。3つの行列の積が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ であることは直接計算すればよい。□

Remark 11 *Theorem 3* の証明内にある行列 $T = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ の R_1 , R_ω , R_{ω^2} による共役計算を容易にする手段がある。交代行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と T の固有値 1 の固有ベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sqrt{3}i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = I_2 - \sqrt{3}i v {}^t v J$$

と表示できる。行列 T の R_{ω^j} による共役は

$$R_{\omega^j} T R_{\omega^j}^{-1} = I_2 - \sqrt{3}i R_{\omega^j} (v {}^t v J) R_{\omega^j}^{-1}$$

であるが、

$${}^t R_{\omega^j}^{-1} J R_{\omega^j}^{-1} = \frac{1}{\det(R_{\omega^j})} J = \frac{1}{-\sqrt{3}i \omega^j} J$$

より

$$R_{\omega^j} T R_{\omega^j}^{-1} = I_2 + \omega^{-j} (R_{\omega^j} v) {}^t (R_{\omega^j} v) J$$

である。この等式と

$$R_1 v = \sqrt{3}i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_\omega v = (\omega - 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_{\omega^2} v = (\omega^2 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、3つの行列が得られる。

Remark 12 ガンマ関数 $\Gamma(t)$ の導関数の 1 における値 $\Gamma'(1)$ は $-\gamma$ である。ここで γ は Euler 定数で $\lim_{N \rightarrow \infty} [\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N]$ により定義される。

Remark 13 Remark 10 で $a = 1/2$ とすると $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ の解の接続公式が得られる。それを用いて $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ の monodromy 群を求めることができる。解の基底は f'_0 でとると $z = 0$ の周りをまわる monodromy 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix}$$

である。 $z = 1$ の周りをまわる monodromy 行列は

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} R^{-1}$$

となる。ここで R は Remark 10 にある接続行列に $a = 1/2$ を代入したものである。ガンマ関数の反転公式を変数 t で 2 回微分すると

$$\Gamma''(t)\Gamma(1-t) - 2\Gamma'(t)\Gamma'(1-t) + \Gamma(t)\Gamma''(1-t) = \pi^3 \frac{2 - \sin^2(\pi t)}{\sin^3(\pi t)}$$

となり、この等式に $t = 1/2$ を代入すると、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ より

$$2 \frac{\Gamma''(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - 2 \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} = \pi^2$$

が得られる。したがって R の $(2, 1)$ 成分は $(C^2 - \pi^2)/\pi$ となり、

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2iC}{\pi} & \frac{2i}{\pi} \\ -\frac{2iC^2}{\pi} & 1 + \frac{2iC}{\pi} \end{pmatrix}$$

となる。行列 R' を $\begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ -C & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$R' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} (R')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R'R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} R^{-1} (R')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、 $SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ の生成元が得られる。

8 テータ関数

複素平面 \mathbb{C} 内の変数 z と上半空間 \mathbb{H} 内の変数 τ をもち $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ をパラメーターとするテータ関数 $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ を級数

$$\vartheta_{a,b}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n+a)^2 \tau + 2\pi i(n+a)(z+b))$$

で定義する。この級数は $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上で広義一様絶対収束するので、 $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上の正則関数関数となり下記の関数等式をみたす

$$\begin{aligned} \vartheta_{a,b}(z, \tau) &= \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(z+b)) \vartheta_{0,0}(z+a\tau+b, \tau), \\ \vartheta_{a,b}(z+1, \tau) &= \exp(2\pi i a) \vartheta_{a,b}(z, \tau), \\ \vartheta_{a,b}(z+\tau, \tau) &= \exp(-2\pi i b) \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \vartheta_{a,b}(z, \tau), \\ \vartheta_{a,b}(-z, \tau) &= \vartheta_{-a,-b}(z, \tau), \\ \vartheta_{a+p,b+q}(z, \tau) &= \exp(2\pi i a q) \vartheta_{a,b}(z, \tau), \\ \vartheta_{a,b}(c\tau+d, \tau) &= \exp(-\pi i c^2 \tau - 2\pi i c(b+d)) \vartheta_{a+c,b+d}(0, \tau), \end{aligned}$$

ここで $c, d \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ とする。変数 τ を固定して1変数 z の関数とみなしたとき、 $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ の \mathbb{C} での挙動は基本平行四辺形 $H = \{s_1\tau + s_2 \in \mathbb{C} \mid 0 \leq s_1, s_2 < 1\}$ 内の挙動で定まってしまう。

Fact 5 固定された τ に対して、 $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ は基本平行四辺形 H 内に1位の零点を1個もつ。また、 $\vartheta_{\frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}-b}(a\tau+b, \tau) = 0$ である。

Proof. 偏角の原理より H 内の零点の個数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial H} d \log(\vartheta_{a,b}(z, \tau)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [d \log(\vartheta_{a,b}(z, \tau)) - d \log(\vartheta_{a,b}(z+\tau, \tau))] \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\tau [-d \log(\vartheta_{a,b}(z, \tau)) + d \log(\vartheta_{a,b}(z+1, \tau))] \end{aligned}$$

である。関数等式により、最後の積分は0であり、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [d \log(\vartheta_{a,b}(z, \tau)) - d \log(\vartheta_{a,b}(z+\tau, \tau))] \\ &= \int_0^1 -d \log[\exp(-2\pi i b) \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z)] = \int_0^1 2\pi i dz = 2\pi i \end{aligned}$$

である。

また、関数等式より

$$\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-z, \tau) = \vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(z, \tau) = \exp(2\pi i \frac{-1}{2}) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) = -\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$$

となるので、 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, \tau) = 0$ を得る。 $\vartheta_{\frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}-b}(z, \tau)$ は $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - a\tau - b, \tau)$ に零にならない指数因子をかけたものなので、その零点は $a\tau + b$ である。□

テータ関数を用いて $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ を周期とする \mathbb{C} 上の有理型関数を構成することができる。

Fact 6 複素平面 \mathbb{C} の点 $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$ が $\sum_{j=1}^k p_j = \sum_{j=1}^k q_j$ をみたすとする。そのとき

$$f(z) = \prod_{j=1}^k \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - p_j, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - q_j, \tau)}$$

は p_1, \dots, p_k を零点とし q_1, \dots, q_k を極とする L を周期とする \mathbb{C} 上の有理型関数である。

Proof. テータ関数の零点の状況および関数等式より容易にわかる。□

テータ関数の零点の状況から $\vartheta_{0,0}(z, \tau)$ の無限積表示が得られる。

Fact 7 (Proposition 14.1 in [M])

$$\begin{aligned} \vartheta_{0,0}(z, \tau) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau)) \\ &\times \prod_{m=1}^{\infty} [\{1 + \exp(\pi i(2m-1)\tau - 2\pi iz)\} \{1 + \exp(\pi i(2m-1)\tau + 2\pi iz)\}] \end{aligned}$$

特に $\vartheta_{a,b}(z, \tau) = \exp(\pi ia^2\tau + 2\pi ia(z + b))\vartheta_{0,0}(z + a\tau + b, \tau)$ より

$$\begin{aligned} \vartheta_{0,0}(0, \tau) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau)) \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \exp(\pi i(2m-1)\tau))^2 \\ \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0, \tau) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau)) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(\pi i(2m-1)\tau))^2 \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0, \tau) &= 2 \exp(\frac{\pi i\tau}{4}) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau)) \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \exp(\pi i(2m)\tau))^2 \end{aligned}$$

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, 3\tau) = \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{12}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau))$$

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(0, 3\tau) = \frac{i}{2} \vartheta_{0,0}(0, \tau) \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0, \tau)$$

が成立する。

Remark 14 無限積

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty} [(1 + \exp(\pi i(2m-1)\tau))(1 - \exp(\pi i(2m-1)\tau))(1 + \exp(\pi i(2m)\tau))] \end{aligned}$$

は 1 である。なぜなら

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(\pi i(4m-2)\tau))(1 + \exp(\pi i(2m)\tau)) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(\pi i(4m-2)\tau))(1 + \exp(\pi i(4m)\tau))(1 + \exp(\pi i(4m-2)\tau)) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(\pi i(8m-4)\tau))(1 + \exp(\pi i(4m)\tau)) = Q(2\tau) \end{aligned}$$

より $Q(\tau) = Q(2\tau) = Q(4\tau) = \dots = Q(2n\tau)$ が成立する。任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(2n\tau) = 1$ であるので $Q(\tau) = 1$ である。

Remark 15 *Jacobi* の Δ 関数は、無限積

$$\Delta(\tau) = \exp(2\pi i \tau) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau))^{24}$$

で定義され、 $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^{24}(0, 3\tau)$ と等しい。

Proposition 3

$$\begin{aligned} \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^4(0, 3\tau) &= \frac{i}{\sqrt{3}} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau), \\ \Delta(\tau) &= \frac{-1}{27} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^6(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^6(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^6(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^6(0, \tau). \end{aligned}$$

Proof. Fact 7 より

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(0, \tau) &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{4}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau)) \\
&\times (1 - \omega) \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - \omega \exp(2\pi i m \tau))(1 - \omega^2 \exp(2\pi i m \tau))] \\
&= (1 - \omega) \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{4}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i (3m) \tau)) \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, \tau) &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{36}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau)) \\
&\times \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - \exp(\pi i (2m - \frac{4}{3}) \tau))(1 - \exp(\pi i (2m - \frac{2}{3}) \tau))] \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau) &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{36}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau)) \\
&\times \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - \omega \exp(\pi i (2m - \frac{4}{3}) \tau))(1 - \omega^2 \exp(\pi i (2m - \frac{2}{3}) \tau))] \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau) &= \exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{36}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau)) \\
&\times \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - \omega^2 \exp(\pi i (2m - \frac{4}{3}) \tau))(1 - \omega \exp(\pi i (2m - \frac{2}{3}) \tau))]
\end{aligned}$$

である。これらの積は

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau) \\
&= (1 - \omega) \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{3}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau))^3 \\
&\times \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i (3m) \tau)) \\
&\times \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - \exp(2\pi i (3m - 1) \tau))(1 - \exp(2\pi i (3m - 2) \tau))]
\end{aligned}$$

$$= (1 - \omega) \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{3}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi i m \tau))^4$$

であり、Fact 7 より $-\sqrt{-3}\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^4(0, 3\tau)$ と等しい。 \square

9 λ の τ による表示

3次曲線 Hesse の標準形 $C(\lambda)$ から \mathbb{C}/L への写像 F で L を周期とする \mathbb{C} 上の有理型関数を $C(\lambda)$ に引き戻す。こうして得られる $C(\lambda)$ 上の有理型関数と3変数の1次式の比で定まる $C(\lambda)$ 上の有理型関数と比較する。

変曲点 P_{3k+j} での接線の定義式 ℓ_{3k+j} と変曲点 $P_{3k'+j'}$ での接線の定義式 $\ell_{3k'+j'}$ との比 $\ell_{3k+j}/\ell_{3k'+j'}$ は $C(\lambda)$ 上の P_{3k+j} で3位の零点をもち $P_{3k'+j'}$ で3位の極をもつ有理型関数とみなせる。

一方、

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{3}, \frac{1}{2} - \frac{j}{3}\right), \quad (a', b') = \left(\frac{1}{2} - \frac{k'}{3}, \frac{1}{2} - \frac{j'}{3}\right), \quad (j, k, j', k' = 0, 1, 2)$$

に対して

$$f(z) = \frac{\vartheta_{a,b}^3(z, \tau)}{\vartheta_{a',b'}^3(z, \tau)}$$

は $z = \frac{k\tau+j}{3}$ で3位の零点をもち、 $z = \frac{k'\tau+j'}{3}$ で3位の極もつ有理型関数である。この関数の正則写像 $F: C(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}/L$ での引き戻しは、 P_{3k+j} で3位の零点をもち $P_{3k'+j'}$ で3位の極をもつ。したがってこれらの有理型関数の相違は、定数倍のみである。その定数倍を $\frac{(k+k')\tau+(j+j')}{3}$ に対応する点での値を考察することにより以下の定理が得られる。

Theorem 4 0 でない定数 C で

$$C \begin{pmatrix} \ell_0, \ell_1, \ell_2 \\ \ell_3, \ell_4, \ell_5 \\ \ell_6, \ell_7, \ell_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) & -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)) & F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)) \\ F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) & -\omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)) & \omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)) \\ F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) & -\omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)) & \omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)) \end{pmatrix}$$

をみtasもの存在する。この状況は

$$Cl_{3k+j} = \vartheta_{3k+j} = (-1)^j \omega^{-jk} F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{k}{3}, \frac{1}{2}-\frac{j}{3}}^3(z, \tau))$$

と表記することもできる。

Proof. 正則1次形式 φ の P_0 と P_{3k+j} を結ぶ道 $\gamma_{0,3k+j}$ ($j, k = 0, 1, 2$) 上の積分は

$$\int_{\gamma_{0,3k+j}} \varphi = \frac{k}{3} \int_A \varphi + \frac{j}{3} \int_B \varphi$$

であったので $F(P_{3k+j}) = \frac{k\tau+j}{3}$ となる。

有理型関数 ℓ_1/ℓ_0 の $P_2 = [-1, 1, 0]$ での値は

$$\ell_1/\ell_0(P_2) = \frac{t_0 + \lambda t_1 + t_2}{\lambda t_0 + t_1 + t_2}(P_2) = \frac{-1 + \lambda}{-\lambda + 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau)/\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_2 での値は、

$$\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(\frac{2}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(\frac{2}{3}, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{2}{3}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2}^3(0, \tau)} = 1$$

である。したがって

$$[\ell_0, \ell_1] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

有理型関数 ℓ_2/ℓ_0 の $P_1 = [1, 0, -1]$ での値は

$$\ell_2/\ell_0(P_1) = \frac{t_0 + t_1 + \lambda t_2}{\lambda t_0 + t_1 + t_2}(P_1) = \frac{1 - \lambda}{\lambda - 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau)/\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_1 での値は、

$$\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(\frac{1}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(\frac{1}{3}, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1}^3(0, \tau)} = -1$$

である。したがって

$$[\ell_0, \ell_2] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。したがって

$$[\ell_0, \ell_1, \ell_2] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)), F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

である。

ℓ_4/ℓ_3 での $P_5 = [-1, \omega, 0,]$ の値を考えて

$$\ell_4/\ell_3(P_5) = \frac{t_0 + \omega^2 \lambda t_1 + \omega t_2}{\lambda t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2}(P_5) = \frac{-1 + \lambda}{-\lambda + 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) / \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_5 での値は、

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(\frac{\tau+2}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{\tau+2}{3}, \tau)} &= \frac{\exp(-2\pi i \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\exp(-2\pi i \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{2}{3}}^3(0, \tau)} \\ &= \omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(0, \tau)} = \omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2}^3(0, \tau)} = \omega \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_3, \ell_4] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -\omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

同様に ℓ_5/ℓ_3 での $P_4 = [1, 0, -\omega^2]$ の値を考えて

$$\ell_5/\ell_3(P_4) = \frac{t_0 + \omega^2 t_1 + \omega \lambda t_2}{\lambda t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2}(P_4) = \frac{1 - \lambda}{\lambda - 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) / \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_4 での値は、

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(\frac{\tau+1}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{\tau+1}{3}, \tau)} = \frac{\exp(-2\pi i \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\exp(-2\pi i \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} \\ & = \omega^2 \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} = \omega^2 \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1}^3(0, \tau)} = -\omega^2 \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_3, \ell_5] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), \omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

したがって

$$[\ell_3, \ell_4, \ell_5] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -\omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau)), \omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

ℓ_7/ℓ_6 での $P_8 = [-1, \omega^2, 0]$ の値を考えて

$$\ell_7/\ell_6(P_8) = \frac{t_0 + \omega \lambda t_1 + \omega^2 t_2}{\lambda t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2}(P_8) = \frac{-1 + \lambda}{-\lambda + 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau)/\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_8 での値は、

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(\frac{2\tau+2}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{2\tau+2}{3}, \tau)} = \frac{\exp(-2\pi i \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\exp(-2\pi i \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{2}{3}}^3(0, \tau)} \\ & = \omega^2 \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(0, \tau)} = \omega^2 \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2}^3(0, \tau)} = \omega^2 \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_6, \ell_7] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -\omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

同様に ℓ_8/ℓ_6 での $P_7 = [1, 0, -\omega]$ の値を考えて

$$\ell_8/\ell_6(P_7) = \frac{t_0 + \omega t_1 + \omega^2 \lambda t_2}{\lambda t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2}(P_7) = \frac{1 - \lambda}{\lambda - 1} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau) / \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_7 での値は、

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(\frac{2\tau+1}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{2\tau+1}{3}, \tau)} = \frac{\exp(-2\pi i \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\exp(-2\pi i \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))^3 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} \\ &= \omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)} = \omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1}^3(0, \tau)} = -\omega \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_6, \ell_8] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), \omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

したがって

$$[\ell_6, \ell_7, \ell_8] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), -\omega F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau)), \omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

ℓ_3/ℓ_0 の $P_6 = [0, -\omega^2, \omega]$ での値は

$$\ell_3/\ell_0(P_6) = \frac{\lambda t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2}{\lambda t_0 + t_1 + t_2}(P_6) = \frac{-\omega + \omega^2}{-\omega^2 + \omega} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) / \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_6 での値は、

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{2\tau}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(\frac{2\tau}{3}, \tau)} = \frac{\exp(-2\pi i \frac{2}{3} \frac{1}{2})^3 \vartheta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\exp(-2\pi i \frac{2}{3} \frac{1}{2})^3 \vartheta_{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)} \\ &= \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2, \frac{1}{2}-1}^3(0, \tau)} = -1 \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_0, \ell_3] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

有理型関数 ℓ_6/ℓ_0 の $P_3 = [0, -\omega, \omega^2]$ での値は

$$\ell_6/\ell_0(P_3) = \frac{\lambda t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2}{\lambda t_0 + t_1 + t_2}(P_3) = \frac{-\omega^2 + \omega}{-\omega + \omega^2} = -1$$

である。一方

$$F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)/\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))$$

の P_3 での値は、

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(\frac{\tau}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(\frac{\tau}{3}, \tau)} &= \frac{\exp(2\pi i \frac{1}{3} \frac{1}{2})^3 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\exp(2\pi i \frac{1}{3} \frac{1}{2})^3 \vartheta_{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)} \\ &= \frac{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)} = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{2} - 1}^3(0, \tau)} = -1 \end{aligned}$$

である。したがって

$$[\ell_0, \ell_6] = [F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)), F^*(\vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))]$$

を得る。

これらの結果をあわせると定理が得られる。 □

曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 $\ell_j/\ell_k = \vartheta_j^3/\vartheta_k^3$ ($2 \leq j < k \leq 8$) の P_0 での値とそれをテータ関数で表示した場合の値を下記の表にまとめておく。

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
1, 2	-1	-1
1, 3	$-\frac{\lambda-1}{\omega-\omega^2}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
1, 4	$\omega + \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
1, 5	$-\omega^2 - \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
1, 6	$\frac{\lambda-1}{\omega-\omega^2}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
1, 7	$\omega^2 + \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
1, 8	$-\omega - \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
2, 3	$\frac{\lambda-1}{\omega-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
2, 4	$-\omega - \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
2, 5	$\omega^2 + \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
2, 6	$-\frac{\lambda-1}{\omega-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
2, 7	$-\omega^2 - \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
2, 8	$\omega + \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
3, 4	$\frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega^2}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
3, 5	$\frac{1-\omega}{\lambda-\omega}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
3, 6	-1	-1
3, 7	$-\frac{1-\omega}{\lambda-\omega}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
3, 8	$-\frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
4, 5	$-\omega + \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$-\frac{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
4, 6	$-\frac{\lambda-\omega^2}{1-\omega^2}$	$-\frac{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
4, 7	$\omega - \frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega}$	$\frac{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
4, 8	-1	-1

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
5, 6	$-\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}$	$\frac{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}$
5, 7	-1	-1
5, 8	$\omega^2 - \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$\frac{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$

j, k	$(\ell_j/\ell_k)(P_0)$	$(\vartheta_j/\vartheta_k)(P_0)$
6, 7	$\frac{1-\omega}{\lambda-\omega}$	$-\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
6, 8	$\frac{1-\omega^2}{\lambda-\omega^2}$	$\frac{\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$
7, 8	$-\omega^2 + \frac{1-\omega}{\lambda-\omega^2}$	$-\frac{\omega\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}{\omega^2\vartheta^3_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}(\tau)}$

関係式

$$\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(\tau), \quad \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) = -\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau),$$

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) = \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau), \quad \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) = \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau),$$

を用いると前記の表より λ の 6 種類の表示が得られる。

label	(j, k)	λ
	$(1, 2), (3, 6), (4, 8), (5, 7)$	
$\langle 012, 036 \rangle$	$(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6)$	$1 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$
$\langle 012, 014 \rangle$	$(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8)$	$\omega^2 + (\omega^2 - 1) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}$
$\langle 012, 057 \rangle$	$(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7)$	$\omega + (\omega - 1) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau)}$
$\langle 036, 048 \rangle$	$(3, 4), (3, 8), (4, 6), (6, 8)$	$\omega^2 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$
$\langle 036, 057 \rangle$	$(3, 5), (3, 7), (5, 6), (6, 7)$	$\omega + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$
$\langle 048, 057 \rangle$	$(4, 5), (4, 7), (5, 8), (7, 8)$	$\omega + (\omega^2 - \omega) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}$

この表の $\langle 012, 014 \rangle$ と $\langle 036, 048 \rangle$ での λ の表示より、関係式

$$\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) = \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$$

が得られ、この表の $\langle 036, 057 \rangle$ と $\langle 048, 057 \rangle$ での λ の表示より、関係式

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) = -\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$$

が得られる。つまり

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$$

$$\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$$

であり、これらの関係式より上記の λ の表示はすべて $\langle 012, 036 \rangle$ における表示に変形できる。どうもこれがよさそうな基底と思える。以上の結果を定理としてまとめておく。

Theorem 5 曲線 $C(\lambda)$ のパラメーター λ は $C(\lambda)$ の周期 τ により、

$$\lambda = 1 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$$

と表示できる。また9個の $\vartheta_{a,b}^3(\tau) = \vartheta_{a,b}^3(0, \tau)$ ($a, b = (\frac{1}{2} - \frac{j}{3}, \frac{1}{2} - \frac{k}{3})$ ($j, k = 0, 1, 2$)) は、 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)$ と $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$ との1次結合で下記のように表示できる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) \\ -\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Corollary 1

$$\begin{aligned} J(C(\lambda)) &= \frac{\lambda^3(\lambda^3 + 2^3)^3}{64(\lambda^3 - 1)^3} \\ &= \frac{1}{27 \times 64} \frac{\Theta_1^3(\tau) \Theta_2^3(\tau) \Theta_3^3(\tau) \Theta_4^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^9(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^9(\tau) (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) - \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau))^3 (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau))^3} \\ &= \frac{1}{27 \times 64} \frac{\Theta_1^3(\tau) \Theta_2^3(\tau) \Theta_3^3(\tau) \Theta_4^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^9(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^9(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^9(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^9(\tau)} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Theta_1(\tau) \\ \Theta_2(\tau) \\ \Theta_3(\tau) \\ \Theta_4(\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^2 & \omega & -\omega & 0 \\ -\omega & -\omega^2 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。

Remark 16 Eisenstein 級数 $E_k(\tau)$ は

$$E_k(\tau) = \sum_{\mathbb{Z}^2 \ni (n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{(n_1\tau + n_2)^k}$$

で定義される。等式

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \frac{(60E_4(\tau))^3 - 27(140E_6(\tau))^2}{(2\pi)^{12}} \\ J(C(\lambda)) &= \frac{(60E_4(\tau))^3}{(60E_4(\tau))^3 - 27(140E_6(\tau))^2} \end{aligned}$$

が知られている。従って

$$\prod_{j=1}^4 \Theta_j^6(\tau) = -\frac{3^{21} \cdot 5^6}{\pi^{24}} E_4^6(\tau) \Delta(\tau)$$

が成立する。また $\prod_{j=1}^4 \Theta_j^3(\tau)$ の各テータ定数を無限積で表示することにより $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau))^{12}$ が括り出せる。さらに $\tau = i\infty$ での挙動は $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)$ $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$ による Θ_j の表示を用いるとわかる。その表示内の $\exp(\pi i\tau)$ の最小べきは $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)$ の級数表示の $n = 0$ の項のみで決定される。 $\prod_{j=1}^4 \Theta_j^3(\tau)$ から $\exp(\pi i\tau)$ が括り出せることとその係数が $-3^4\sqrt{-3}$ であることがわかる。一方

$$\lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty} E_4(\tau) = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

なので

$$\prod_{j=1}^4 \Theta_j^3(\tau) = -\frac{3^{10} \cdot 5^3}{\pi^{12}} \sqrt{-3} \left(\exp(\pi i\tau) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi im\tau))^{12} \right) E_4^3(\tau)$$

が成立する。

10 テータ関数のみたす関係式

Section 2 で調べたように

$$\ell_1 + \ell_4 + \ell_7 = \ell_2 + \ell_5 + \ell_8 = 3t_0$$

$$\ell_0 + \ell_3 + \ell_6 = 3\lambda t_0$$

なので

$$\begin{aligned} & -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)) \\ = & F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda & = -F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)} \right) \\ & = F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

が任意の z に対して成立する。

同様に

$$\begin{aligned} \ell_0 + \omega \ell_3 + \omega^2 \ell_6 & = \ell_2 + \omega \ell_5 + \omega^2 \ell_8 = 3t_1 \\ \ell_1 + \omega \ell_4 + \omega^2 \ell_7 & = 3\lambda t_1 \\ \ell_0 + \omega^2 \ell_3 + \omega \ell_6 & = \ell_1 + \omega^2 \ell_4 + \omega \ell_7 = 3t_2 \\ \ell_2 + \omega^2 \ell_5 + \omega \ell_8 & = 3\lambda t_2 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} & F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\ = & F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda & = -F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)} \right) \\ & = -F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3(z, \tau)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\ = & -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3(z, \tau)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)} \right) \\ &= -F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{2}{3}}^3(z, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}}^3(z, \tau)} \right)\end{aligned}$$

が任意の z に対して成立する。これらの関係式より次の定理が得られる。

Theorem 6 9個のテータ関数の3乗 $\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{k}{3}, \frac{1}{2}-\frac{j}{3}}^3(z, \tau)$ たちの張る線型空間は3次元で $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)$, $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau)$, $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)$ を基底としてとることができ、他者は下記のような1次結合で表示できる。

$$\begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\omega^2}{1-\omega} & -\frac{\omega^2(\lambda-\omega^2)}{\lambda-\omega} & -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{(1-\omega)(\lambda-\omega)} \\ -\omega^2 & \frac{\lambda-\omega^2}{\lambda-\omega} & \frac{\omega^2(\lambda-\omega^2)}{\lambda-\omega} \\ \frac{\lambda-\omega^2}{1-\omega} & -\omega^2 & -\frac{\lambda-\omega^2}{1-\omega} \\ -\frac{\omega(\lambda-\omega^2)}{\lambda-1} & -\frac{3\omega\lambda}{(\lambda-1)(\lambda-\omega)} & -\frac{\omega^2(\lambda-\omega^2)}{\lambda-\omega} \\ \frac{\lambda-\omega^2}{\lambda-1} & \frac{\lambda-\omega^2}{\lambda-1} & -1 \\ \frac{(\lambda+2\omega)(\lambda-\omega)}{(1-\omega)(\lambda-1)} & -\frac{\omega^2(\lambda-\omega^2)}{\lambda-1} & -\frac{\lambda-\omega^2}{1-\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \end{pmatrix}$$

また、 λ を含まない線型関係式としては

$$\begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega & \omega^2 & \omega & -\omega^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \omega & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \end{pmatrix}$$

が成立する。

等式 (6) における左辺 $F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau))$ は $C(\lambda)$ 上の1価関数ではないが $P_0 = [0, -1, 1]$ において0になるので、その点に対応する $z = 0$ では値は0となる。つまり

$$\begin{aligned}0 &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(0, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(0, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(0, \tau) \\ &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)\end{aligned}$$

となる。また、等式 (6) において $P_1 = [1, 0, -1]$ に対応する点 $z = \frac{1}{3}$ での関係式は $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau) = 0$, $\vartheta_{-a, -b}(0, \tau) = \vartheta_{a, b}(0, \tau)$ および上記の等式より

$$\begin{aligned}
& \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) \\
& + \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}^3\left(\frac{1}{3}, \tau\right) \\
= & \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\
& \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) + \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \\
= & (\omega^2 - \omega) \left\{ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau) - \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) \right\} = 0
\end{aligned}$$

となる。このようにしてもテータ定数 $\vartheta_{a, b}^3(\tau)$ 間の線型関係式が得られる。また、等式 (7) に $P = P_1 = [1, 0, -1]$ つまり $z = \frac{1}{3}$ を代入し、テータ定数の関係式を用いても λ の表示が得られる。

また、 z によらない 0 でない定数 c で

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) &= c\lambda t_0 \\
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) &= ct_1 \\
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) &= ct_2
\end{aligned}$$

となるものが存在する。点 $[t_0, t_1, t_2]$ は $C(\lambda)$ 上にあることから以下の定理が得られる。

Theorem 7 3つのテータ関数は

$$\begin{aligned}
& (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))^3 \\
= & \lambda^3 (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\omega \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\omega^2 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)) \\
& \times (\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau))
\end{aligned}$$

という9次関係式をみます。 l_1, l_4, l_7 および l_2, l_5, l_8 と比例している3つに
テータ関数に対しても同様の関係式が成立する。

Proof. 曲線 $C(\lambda)$ の点 $[t_0, t_1, t_2]$ は関係式 $t_0^3 = 3\lambda t_0 t_1 t_2 - t_1^3 - t_2^3$ をみたと
で、 $[t_0, t_1, t_2]$ に対するテータ関数による表示を代入すればよい。そのとき、
右辺のテータ関数の9次式が9個のテータ関数の1次式の積に分解している。
それらの1次式は3つの変曲点を通る直線の定義式 $l_{012}, l_{345}, l_{678}, l_{048}, l_{156},$
 $l_{237}, l_{057}, l_{138}, l_{246}$ に対応していることに注意する。□

3つのテータ関数の積 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$ の F による引き戻
しは P_0, P_3, P_6 で0となる。同様に $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau)$ および
 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau)$ の F による引き戻しはそれぞれ P_1, P_4, P_7
および P_2, P_5, P_8 で0となる。これらの関数の比により $C(\lambda)$ の有理型関数
が定まることに注目して以下の定理を得る。

Theorem 8 0 でない定数 C で

$$C \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau)) \\ -F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau)) \\ F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau)) \end{pmatrix}$$

をみtasもの存在する。これらの関数は関係式

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^2 (-1)^j \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{j}{3}}^3(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{j}{3}}^3(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{j}{3}}^3(z, \tau) \\ &= -3\lambda \prod_{0 \leq j, k \leq 2} \vartheta_{\frac{1}{2} - \frac{k}{3}, \frac{1}{2} - \frac{j}{3}}(z, \tau) \end{aligned}$$

をみtas。

Proof. 零と極の状況により

$$C \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau)) \\ c_2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau)) \\ F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau)) \end{pmatrix}$$

である。ここで C, c_1, c_2 は z によらない定数である。 c_1, c_2 の値を決定する。
曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 t_2/t_0 での $P_1 = [1, 0, -1]$ での値は -1 なので

$$-1 = \frac{1}{c_1} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(\frac{1}{3}, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(\frac{1}{3}, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(\frac{1}{3}, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\frac{1}{3}, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(\frac{1}{3}, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(\frac{1}{3}, \tau)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c_1} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}+1}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}+1}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}+1}(\tau)} = \frac{-1}{c_1} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(\tau)} \\
&= \frac{-1}{c_1} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)} = \frac{-1}{c_1}
\end{aligned}$$

なので $c_1 = 1$ である。

同様に曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 t_2/t_1 での $P_0 = [0, -1, 1]$ での値は -1 なので

$$\begin{aligned}
-1 &= \frac{1}{c_2} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau)} \\
&= \frac{1}{c_2} \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)} = \frac{1}{c_2} \frac{\vartheta_{\frac{-1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)} \\
&= \frac{1}{c_2}
\end{aligned}$$

であり $c_2 = -1$ である。 □

Theorem 9 以下の関係式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\
&= 3\mu \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau)
\end{aligned}$$

となる、ここで μ は

$$\mu = \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{3\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau)}$$

である。

Proof. 3つのテータ関数の3乗和 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)$ の F による引き戻しも t_0 と比例していることから $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau)$ と $3\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$ は比例している。定数 μ は $z = -1/3$ を代入すれば求まる。 □

Remark 17 μ^3 は $\lambda = 1 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$ の有理式

$$\mu^3 = \frac{\lambda^3}{\lambda^3 - 1}$$

となる。形式的には

$$\mu = \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\lambda^3 - 1}}$$

である。3乗根の枝はどうなっているのだろうか？また、 λ^3 は μ^3 を用いて

$$\lambda^3 = \frac{\mu^3}{\mu^3 - 1}$$

と表示できる。この *involution* に相当するものは何なんだろうか？

Corollary 2 同じ μ に対して

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) \\ = & 3\mu \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ = & 3\mu \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \end{aligned}$$

が成立する。

Proof. t_1, t_2 の3つのテータ関数の3乗和と積による表示を利用せよ。 □

直線 $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$ は Section 2 で与えた3つの変曲点を通る直線の定義式 $L_{036} : \ell_{036} = 0, L_{147} : \ell_{147} = 0, L_{258} : \ell_{258} = 0$ である。残りの9本の直線と対応する3つのテータ関数の積を与える。

Theorem 10 以下の等式が成立する

$$C\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau) = \begin{pmatrix} l_{036} \\ l_{147} \\ l_{258} \\ l_{012} \\ l_{345} \\ l_{678} \\ l_{048} \\ l_{156} \\ l_{237} \\ l_{057} \\ l_{138} \\ l_{246} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)) \\ -\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)) \\ \vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ \omega^2(1-\omega)\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ \omega(1-\omega)\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ (1-\omega)\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ (-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ \omega^2(-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)) \\ (-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)) \\ (-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)) \\ \omega(-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}}(z,\tau)) \\ (-1+\omega^2)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(\tau)F^*(\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{-1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(z,\tau)\vartheta_{\frac{-1}{6},\frac{1}{2}}(z,\tau)) \end{pmatrix}$$

ここで C は Theorem 8 で与えた定数とする。

Proof. 1 次式 l_{ijk} と与えられたテータ関数の 3 つの積の引き戻しの零点の状況は一致しているので、定数倍の調整を行う。

曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 l_{ijk}/l_{pqr} の P_s での値と対応するテータ関数の 3 つの積の比の F による引き戻しの値 θ を表にする。

(ijk, pqr, s)	l_{ijk}/l_{pqr}	P_s	$l_{ijk}/l_{pqr}(P_s)$	θ
(012, 678, 3)	$\frac{t_0+t_1+t_2}{t_0+\omega t_1+\omega^2 t_2}$	$[0, -\omega, \omega^2]$	-1	$-\omega$
(345, 678, 0)	$\frac{t_0+\omega^2 t_1+\omega t_2}{t_0+\omega t_1+\omega^2 t_2}$	$[0, -1, 1]$	-1	$-\omega^2$
(048, 237, 1)	$\frac{\omega^2 t_0+t_1+t_2}{t_0+t_1+\omega^2 t_2}$	$[1, 0, -1]$	-1	-1
(156, 237, 0)	$\frac{t_0+\omega^2 t_1+t_2}{t_0+t_1+\omega^2 t_2}$	$[0, -1, 1]$	-1	$-\omega$
(057, 246, 1)	$\frac{\omega t_0+t_1+t_2}{t_0+t_1+\omega t_2}$	$[1, 0, -1]$	-1	-1
(138, 246, 0)	$\frac{t_0+\omega t_1+t_2}{t_0+t_1+\omega t_2}$	$[0, -1, 1]$	-1	$-\omega^2$
(678, 258, 0)	$\frac{t_0+\omega t_1+\omega^2 t_2}{t_2}$	$[0, -1, 1]$	$-\omega + \omega^2$	$-\omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{6}}(\tau)}$
(237, 258, 0)	$\frac{t_0+t_1+\omega^2 t_2}{t_2}$	$[0, -1, 1]$	$-1 + \omega^2$	$\frac{\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\tau)}$
(246, 258, 0)	$\frac{t_0+t_1+\omega t_2}{t_2}$	$[0, -1, 1]$	$-1 + \omega$	$-\omega \frac{\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6},\frac{-1}{6}}(\tau)}$

これらの結果より定理が得られる。 □

Remark 18 前定理にある3つのテータ関数の積たちにはたくさんの1次関係式がある。それらの関係式はすべて ℓ_{ijk} たちの間の線型関係式から導き出せる。また、3つのテータ関数の積たちの間には $C(\lambda)$ の定義式に対応する3次関係式がある。

関数 $h(z) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)$ を考える。この関数の零点は

$$3z \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}(3\tau) + \mathbb{Z}}$$

なので

$$z \equiv 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \pmod{L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}$$

である。また、この関数の格子 L に関する準周期性は

$$\begin{aligned} h(z+1) &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z+3, 3\tau) = -\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) = -h(z) \\ h(z+\tau) &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z+3\tau, 3\tau) = -\exp(-3\pi i\tau - 6\pi iz)\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ &= -\exp(-3\pi i\tau - 6\pi iz)h(z) \end{aligned}$$

であり、 $\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{k}{3}, \frac{1}{2}-\frac{j}{3}}^3(z, \tau)$ ($0 \leq j, k \leq 2$) たちの準周期性と同じである。従ってこの関数を F で引き戻し $F^*(h(z))$ と $F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}-\frac{k}{3}, \frac{1}{2}-\frac{j}{3}}^3(z, \tau))$ との比は $C(\lambda)$ 上の有理型関数を定める。 $z = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ に対応する点は P_0, P_1, P_2 なので $\frac{\ell_{012}}{\ell_{3k+j}}$ により定まる $C(\lambda)$ 上の有理型関数の定数倍である。関数 $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)$, $\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)$ は上記の関数と同じ準周期性をもち $z = \frac{\tau}{3}, \frac{\tau+1}{3}, \frac{\tau+2}{3}$ および $z = \frac{2\tau}{3}, \frac{2\tau+1}{3}, \frac{2\tau+2}{3}$ に零点をもつ。これらの点は P_3, P_4, P_5 および P_6, P_7, P_8 に対応しているので、以下の定理を得る。

Theorem 11 0 でない定数 C で

$$C \begin{pmatrix} \ell_{012} \\ \ell_{345} \\ \ell_{678} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \\ \omega^2 F^*(\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \\ \omega F^*(\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \end{pmatrix}$$

となるものが存在する。

Proof. 零点の状況より 0 でない定数 C で

$$C \begin{pmatrix} \ell_{012} \\ \ell_{345} \\ \ell_{678} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 F^*(\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \\ c_1 F^*(\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \\ F^*(\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)) \end{pmatrix}$$

となるものがある、ここで c_0, c_1 も 0 でない定数である。これらの定数を決定する。曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 $\frac{\ell_{345}}{\ell_{678}} = \frac{t_0 + \omega^2 t_1 + \omega t_2}{t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2}$ の $P_0 = [0, -1, 1]$ での値は -1 である。 P_0 と $z = 0$ が対応するので

$$c_1 F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)} \right) (P_0) = c_1 \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, 3\tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, 3\tau)} = c_1 \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}-1}(3\tau)} = -c_1 \omega^2$$

より、 $c_1 = \omega$ である。

曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数 $\frac{\ell_{012}}{\ell_{678}} = \frac{t_0 + t_1 + t_2}{t_0 + \omega t_1 + \omega^2 t_2}$ の $P_3 = [0, -\omega, \omega^2]$ での値は -1 である。 P_3 と $z = \frac{\tau}{3}$ が対応するので

$$c_0 F^* \left(\frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau)} \right) (P_3) = c_0 \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\frac{3\tau}{3}, 3\tau)}{\vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(\frac{3\tau}{3}, 3\tau)} = c_0 \frac{\vartheta_{-\frac{1}{6}+1, \frac{1}{2}}(3\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3\tau)} = -c_0 \omega$$

より、 $c_0 = \omega^2$ である。 □

Corollary 3 下記の等式が成立する。

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau) \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \end{pmatrix} \\ &= -\sqrt{-3} \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(3\tau) \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proof. 写像 F による引き戻しの零点の状況により、2式

$$\begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{pmatrix}$$

は比例している。さらに

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3\tau) \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(z, \tau) \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(z, \tau) \end{pmatrix} \\ &= \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(\tau) \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立することがわかる。実際、第 2 行と第 3 行に関しては $z = 0$ を代入すれば等式が成立し、第 1 行に関しては $z = \frac{-\tau}{3}$ を代入すればよい。この両辺に $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(\tau)$ をかけて Proposition 3 を用いればよい。□

Corollary 4 *Theorem 11* の定数 C に対して

$$\begin{aligned} 3C \begin{pmatrix} \ell_{036} \\ \ell_{147} \\ \ell_{258} \end{pmatrix} &= 3C \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\ &= F^* \begin{pmatrix} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立する。従って $\lambda = 1 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}$ に対して

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(3z, 3\tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(3z, 3\tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(3z, 3\tau) \\ &= 3\nu \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{aligned}$$

をみたく、ここで

$$\nu = \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1} = 1 - (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(\tau)}{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(\tau)}$$

である。

Proof. *Theorem 11* と恒等式

$$\begin{aligned} \ell_{012} + \ell_{345} + \ell_{678} &= 3t_0 \\ \ell_{012} + \omega \ell_{345} + \omega^2 \ell_{678} &= 3t_1 \\ \ell_{012} + \omega^2 \ell_{345} + \omega \ell_{678} &= 3t_2 \end{aligned}$$

より得られる。 ν の λ による表示は Section 2 で述べてある。□

$t_0 = \ell_{036}$ と比例している関数たちをあげておく。

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) + \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^3(z, \tau) \\ & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) + \omega \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^3(z, \tau) \\ & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \\ & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega^2 \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) + \omega \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}(3z, 3\tau) \end{aligned}$$

11 テータ関数のみたす 3 次関係式

テータ関数のみたす 3 次関係式を文献 [I] の補題を用いて導く。

Lemma 2 ([I], p. 136) 格子 L の関数 $f(l)$ に対して $\sum_{l \in L} |f(l)|$ が収束しているとき、 L の有限指数の部分格子 L_1, L_2 に対して、

$$[L, L_1] \sum_{n \in L_1} f(n) = \sum_{m \in L_2, c \in L/L_2} \sum_{\chi \in \text{Hom}(L/L_1, \mathbb{C}^*)} \chi(m+c) f(m+c)$$

が成立する、ここで \mathbb{C}^* は乗法群 $\mathbb{C} - \{0\}$ を表す。

Proof. 等式

$$\sum_{\chi \in \text{Hom}(L/L_1, \mathbb{C}^*)} \chi(m+c) f(m+c) = \begin{cases} [L, L_1] f(m+c) & \text{if } m+c \in L_1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

および $m+c$ が L 全体を重複なく動くことより、右辺は左辺と一致することがわかる。□

3 次正方行列

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

は、

$${}^t T = T, \quad T^2 = I_3$$

をみたす。行列 T の固有値は ± 1 で固有値 1 の固有空間は 2 次元で $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$ で張られ、固有値 -1 の固有空間は $(1, 1, 1)$ で張られる。この行列の存在を渡辺氏 (北見工大) に教えてもらった。

Theorem 12 テータ関数は下記の関係式をみたす。

$$\begin{aligned} & 3 \prod_{j=1}^3 \vartheta_{a_j, b_j}(z_j, \tau) \\ &= \sum_{e, f} \exp(-2\pi i \operatorname{tr}(f {}^t c)) \prod_{j=1}^3 \vartheta_{c_j + e_j, d_j + f_j}(w_j, \tau) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = Tz = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} z_1 - 2z_2 - 2z_3 \\ -2z_1 + z_2 - 2z_3 \\ -2z_1 - 2z_2 + z_3 \end{pmatrix}, \\ a &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = Ta, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = Tb, \end{aligned}$$

とし、

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \text{ についての和は } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\pm 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

の3通りの値についてそれぞれ行う。つまり右辺は9項の和となっている。

Proof. 格子

$$L_1 = \left\{ n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}^3$$

に対して、格子 L_2 を $TL_1 = \{m = Tn \mid n \in L_1\}$ で定め、格子 L を L_1 と L_2 で生成される格子 $\langle L_1, L_2 \rangle$ とする。これらの格子は以下のような特徴づけをもつ。

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \in \frac{\mathbb{Z}^3}{3} \mid m_1 - m_2, m_1 - m_3, \in \mathbb{Z} \right\}, \\ L_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \in L \mid m_1 - 2m_2 - 2m_3 \in 3\mathbb{Z} \right\}, \\ L_1 \cap L_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \mid n_1 - 2n_2 - 2n_3 \in 3\mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

従って $[L, L_1] = [L, L_2] = 3$ であり、 $L/L_2 \simeq L_1/(L_1 \cap L_2)$ の代表元は $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_1 \in \{0, \pm 1\}$ でとれ、 $L/L_1 \simeq L_2/(L_1 \cap L_2)$ の代表元は $e = Tp = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} p_1 \\ -2p_1 \\ -2p_1 \end{pmatrix}$, $p_1 \in \{0, \pm 1\}$ でとれる。また $\text{Hom}(L/L_1, \mathbb{C}^*)$ 元 χ は上記の $p \in L_1/(L_1 \cap L_2)$ を用いて

$$\chi : L/L_1 \ni l \mapsto \exp(2\pi i \text{tr}(p {}^t l)) \in \mathbb{C}^*$$

で表すことができる。変数 $z \in \mathbb{C}^3$, $\tau \in \mathbb{H}$, $a, b \in \mathbb{Q}^3$ を固定して、格子 L, L_1, L_2 および関数

$$f(l) = \exp[\pi i \text{tr}((l+a)\tau {}^t(l+a)) + 2\pi i \text{tr}((l+a) {}^t(z+b))]$$

に対して、Lemma 2 を適応する。Lemma 2 の左辺は

$$3\vartheta_{a_1, b_1}(z_1, \tau)\vartheta_{a_2, b_2}(z_2, \tau)\vartheta_{a_3, b_3}(z_3, \tau)$$

であることは容易にわかる。

一方、Lemma 2 の右辺は

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in L_2} \sum_{p, q \in L_1/(L_1 \cap L_2)} \exp(2\pi i \text{tr}(q {}^t(m+p))) \\ & \quad \times \exp[\pi i \text{tr}((m+p+a)\tau {}^t(m+p+a))] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \text{tr}((m+p+a) {}^t(z+b))] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p, q \in L_1/(L_1 \cap L_2)} \exp(2\pi i \text{tr}(-q {}^t a)) \exp(2\pi i \text{tr}(q {}^t(Tn+p+a))) \\ & \quad \times \exp[\pi i \text{tr}((Tn+p+a)\tau {}^t(Tn+p+a))] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \text{tr}((Tn+p+a) {}^t(z+b))] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p, q \in L_1/(L_1 \cap L_2)} \exp(-2\pi i \text{tr}(Tq {}^t a T^{-1})) \\ & \quad \times \exp[\pi i \text{tr}(T(Tn+p+a)\tau {}^t(Tn+p+a)T^{-1})] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \text{tr}(T(Tn+p+a) {}^t(z+b)T^{-1})] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p, q \in L_1/(L_1 \cap L_2)} \exp(-2\pi i \text{tr}(Tq {}^t(Ta))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp[\pi i \operatorname{tr}((n + Tp + Ta)\tau {}^t(n + Tp + Ta))] \\
& \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}((n + Tp + Ta) {}^t(Tz + Tb + Tq))] \\
= & \sum_{n \in L_1} \sum_{e, f \in L_2 / (L_1 \cap L_2)} \exp(-2\pi i \operatorname{tr}(f {}^t c)) \\
& \times \exp[\pi i \operatorname{tr}((n + e + c)\tau {}^t(n + e + c))] \\
& \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}((n + e + c) {}^t(w + d + f))] \\
= & \sum_{e, f \in L_2 / (L_1 \cap L_2)} \exp(-2\pi i \operatorname{tr}(f {}^t c)) \\
& \times \vartheta_{c_1 + e_1, d_1 + f_1}(w_1, \tau) \vartheta_{c_2 + e_2, d_2 + f_2}(w_2, \tau) \vartheta_{c_3 + e_3, d_3 + f_3}(w_3, \tau)
\end{aligned}$$

となる。ここで固有和に関する性質 $\operatorname{tr}(TXT^{-1}) = \operatorname{tr}(X)$ と $T = {}^tT = T^{-1}$ を用いている。 \square

Remark 19 変数 z および a, b が g 次行ベクトルとなり、 τ が g 次 Siegel 上半空間

$$\mathbb{H}^g = \{\tau \in M(g, g; \mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau, \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$$

を動く多変数テータ関数

$$\vartheta_{a,b}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp[\pi i(n + a)\tau {}^t(n + a) + 2\pi i(n + a) {}^t(z + b)]$$

に対しても *Theorem 12* と同様の関係式

$$\begin{aligned}
& 3^g \prod_{j=1}^3 \vartheta_{a_j, b_j}(z_j, \tau) \\
= & \sum_{e, f \in L_2 / (L_1 \cap L_2)} \exp(-2\pi i \operatorname{tr}(f {}^t c)) \prod_{j=1}^3 \vartheta_{c_j + e_j, d_j + f_j}(w_j, \tau)
\end{aligned}$$

が成立する。ここで $L_1 = \mathbb{Z}^{3 \times g} = M(3, g; \mathbb{Z})$, $L_2 = TL_1$ として、*Theorem 12* およびその証明で現れた $n, m, a, b, c, d, e, f, p, q, z, w$ たちをすべて $3 \times g$ 行列とみなし、 $n_j, m_j, a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j, p_1, q_1, z_j, w_j$ たちを g 次行ベクトルみなせばよい。 $L_2 / (L_1 \cap L_2)$ の代表元 e, f は *Theorem 12* での 3 元たちを g 個横に並べてできる 3^g 個の元たちでとれる。

テータ関数のみならず 3 次関係式は、文献 [BL] や [LB] (*Chapter 7, Section 6*) にも記載されているがこれと一致しているようには思えない。

4 次正方行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は、

$${}^tT = T, \quad T^2 = 3I_4$$

をみtas。行列 T の固有値は $\pm\sqrt{3}$ でそれに対する固有空間はいずれも 2 次元である。

Theorem 13 テータ関数は下記の関係式をみtas。

$$\prod_{j=1}^4 \vartheta_{a_j, b_j}(z_j, \tau) = \sum_{p_1, p_2 \in \{0, \pm 1\}} \prod_{j=1}^4 \vartheta_{\frac{c_j}{3} + \frac{e_j}{3}, d_j}(w_j, 3\tau),$$

ここで

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = Tz = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + z_3 \\ z_1 - z_2 - z_4 \\ z_1 - z_3 + z_4 \\ -z_2 + z_3 + z_4 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = Ta, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = Tb,$$

とし、 $p_1, p_2 \in \{0, \pm 1\}$ に対し

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = Tp = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_1 - p_2 \\ p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

で定め、和は p_1, p_2 についての 9 項で実行する。特に

$$\vartheta_{a_4, b_4}(0, \tau) \prod_{j=1}^3 \vartheta_{a_j, b_j}(z_j, \tau) = \sum_{p_1, p_2 \in \{0, \pm 1\}} \vartheta_{\frac{c_1}{3} + \frac{p_1 + p_2}{3}, d_1}(3z_1, 3\tau) \prod_{j=2}^4 \vartheta_{\frac{c_j}{3} + \frac{e_j}{3}, d_j}(0, 3\tau)$$

が成立する。

Proof. 格子

$$L_1 = \left\{ n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} \mid n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}^4$$

に対して、格子 L_2 を $TL_1 = \{m = Tn \mid n \in L_1\}$ で定める。格子 L_2 は L_1 の部分格子で $\det(T) = 3^2$ より $[L_1, L_2] = 3^2$ であり、 L_1/L_2 の代表元は

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1, p_2 \in \{0, \pm 1\} \text{ とれる。格子 } L_1 \text{ 上の関数}$$

$$f(n) = \exp[\pi i \operatorname{tr}((n+a)\tau)^t(n+a)] + 2\pi i \operatorname{tr}((n+a)^t(z+b))]$$

に対し、 $\sum_{n \in L_1} f(n)$ は

$$\prod_{j=1}^4 \vartheta_{a_j, b_j}(z_j, \tau)$$

であることは容易にわかる。一方、この和は m を L_2 を動かし p を L_1/L_2 を動かしたのもでも実現できる。そのとき

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in L_2} \sum_{p \in L_1/L_2} \exp[\pi i \operatorname{tr}((m+p+a)\tau)^t(m+p+a)] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}((n+a)^t(z+b))] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p \in L_1/L_2} \exp[\pi i \operatorname{tr}((Tn+p+a)\tau)^t(Tn+p+a)] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}((Tn+p+a)^t(z+b))] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p \in L_1/L_2} \exp[\pi i \operatorname{tr}(T^{-1}(Tn+p+a)\tau)^t(Tn+p+a)T] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}(T^{-1}(Tn+p+a)^t(z+b)T)] \\ = & \sum_{n \in L_1} \sum_{p \in L_1/L_2} \exp[\pi i \operatorname{tr}((n + \frac{Tp+Ta}{3})(3\tau)^t(n + \frac{Tp+Ta}{3}))] \\ & \quad \times \exp[2\pi i \operatorname{tr}((n + \frac{Tp+Ta}{3})^t(Tz+Tb))] \\ = & \sum_{p \in L_1/L_2} \prod_{j=1}^4 \vartheta_{\frac{c_j+e_j}{3}, d_j}(w_j, 3\tau) \end{aligned}$$

となる。ここで固有和に関する性質 $\text{tr}(TXT^{-1}) = \text{tr}(X)$ と $T = {}^tT = 3T^{-1}$ を用いている。

$$\text{とくに } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の場合、 } w = \begin{pmatrix} 3z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる。} \quad \square$$

12 テータ関数への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用

この Section では、テータ関数 $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ ($a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$) への $SL_2(\mathbb{Z})$ および $\Gamma(3)$ の作用を下記の事実を用いて計算する。

Fact 8 ([I], p.85, p.176) $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $g = (g_{jk})$ に対して

$$\vartheta_{g \cdot (a,b)}(g \cdot (z, \tau)) = \kappa(g) \varepsilon_{a,b}(g) \exp\left[\pi i \frac{g_{21} z^2}{g_{21} \tau + g_{22}}\right] \sqrt{g_{21} \tau + g_{22}} \vartheta_{a,b}(z, \tau)$$

が成立する、ここで

$$\begin{aligned} g \cdot (z, \tau) &= \left(\frac{z}{g_{21} \tau + g_{22}}, \frac{g_{11} \tau + g_{12}}{g_{21} \tau + g_{22}} \right), \\ g \cdot (a, b) &= (a, b) g^{-1} + \frac{1}{2} (g_{21} g_{22}, g_{11} g_{12}), \\ \varepsilon_{a,b}(g) &= \exp[-\pi i (a^2 g_{12} g_{22} - 2abg_{12} g_{21} + b^2 g_{21} g_{11} - (ag_{22} - bg_{21})g_{11} g_{12})] \end{aligned}$$

であり $\kappa(g)$ は z, τ, a, b に依存しない 1 の 8 乗根である。特に $SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対しては

$$\begin{aligned} \vartheta_{a,b-a+\frac{1}{2}}(z, \tau+1) &= \exp[-\pi i a(a-1)] \vartheta_{a,b}(z, \tau), \\ \vartheta_{-b,a}\left(\frac{z}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) &= \exp[-2\pi i ab] \exp\left[\pi i \frac{z^2}{\tau}\right] \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_{a,b}(z, \tau), \end{aligned}$$

となる、ここで $(\frac{\tau}{i})^{\frac{1}{2}}$ は τ が純虚数のときに正の実数となるように枝を取る。

ここで $S^2 = -I$ であって、それは $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ へは自明なものでなく $(z, \tau) \mapsto (-z, \tau)$ として作用していることに注意する。

Lemma 3 $a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$ に対して、 T, S は $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ に以下のように作用する。

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^T &= \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^S &= \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \\
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}, & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}, \\
\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}, & \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}, \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^T &= \exp\left(\frac{5\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}, & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^S &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}}, \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{5\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}, & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{\pi i}{18}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}, \\
\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{-7\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}, & \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{-\pi i}{18}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}, \\
\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^T &= \exp\left(\frac{-7\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}, & \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}^S &= \exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}, \\
\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{5\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}}, & \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{-\pi i}{18}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}, \\
\vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^T &= \exp\left(\frac{5\pi i}{36}\right) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}}, & \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}}^S &= \exp\left(\frac{\pi i}{18}\right) \xi_S(z, \tau) \vartheta_{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}},
\end{aligned}$$

ここで

$$\vartheta_{a,b} = \vartheta_{a,b}(z, \tau), \quad \vartheta_{a,b}^T = \vartheta_{a,b}(z, \tau + 1), \quad \vartheta_{a,b}^S = \vartheta_{a,b}\left(\frac{z}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right),$$

$$\xi_S(z, \tau) = \exp\left[\pi i \frac{z^2}{\tau}\right] \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

とする。

Remark 20 Lemma 3 の指数因子から少し共通因子をくくり出すと -1 の 9 乗根を用いて表示できる。

$$\exp\left(\frac{5\pi i}{36}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \exp\left(\frac{-\pi i}{9}\right), \quad \exp\left(\frac{-7\pi i}{36}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \exp\left(\frac{-4\pi i}{9}\right),$$

$$\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \exp\left(\frac{6\pi}{9}\right), \quad \exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \exp\left(\frac{3\pi}{9}\right),$$

$$\exp\left(\frac{\pi i}{18}\right) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \exp\left(\frac{5\pi}{9}\right), \quad \exp\left(\frac{-\pi i}{18}\right) = \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \exp\left(\frac{4\pi}{9}\right).$$

共通に現れる因子を無視することにより、以下の命題が得られる。

Proposition 4 9 個の関数 $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ ($a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$) で張られる線型空間への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用により、9 次元射影表現が得られる。

これらの関数の3乗たちで張られる線型空間への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用による9次元表現では T, S が

$$\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$i \exp\left[\pi i \frac{z^2}{\tau}\right] \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

に移される。この表現空間は3次元なので3次元表現も得られるが T, S の表現行列は複雑になる。

2個の関数 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(0, \tau), \vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)$, で張られる線型空間への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用により、2次元射影的表現が得られる。 T, S の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この表現の $SL_2(\mathbb{Z})$ の像は4次交代群 A_4 である。

Proof. Lemma 3 より表現行列は容易に得られる。また、射影群として

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & \omega^2 \end{pmatrix}^3 = I, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I = I$$

をみだし、これらの行列で12元が構成できるのでそれらは交代群 A_4 を構成している。□

Corollary 5 $\lambda = 1 + (\omega - \omega^2) \frac{\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}^3(0, \tau)}{\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}^3(0, \tau)}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 T, S の作用により

$$T : \lambda \mapsto \omega \frac{\omega\lambda + 2}{\omega\lambda - 1}, \quad S : \lambda \mapsto \frac{\lambda + 2}{\lambda - 1}$$

となる。

Proof. Proposition 4 の結果を λ の表示に代入し変化を追跡すればよい。□

Remark 21 Corollary 1 で $\vartheta_{a,b}^3(\tau)$ たちの3つの和として定義された $\Theta_j(\tau)$ に対して、 $\prod_{j=1}^4 \Theta_j^k(\tau)$ は、 $k \notin 6\mathbb{N}$ のときは通常の意味での保型形式ではない。 $S, T \in SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^4 \Theta_j(S \cdot \tau) &= -(\tau)^6 \prod_{j=1}^4 \Theta_j(\tau) \\ \prod_{j=1}^4 \Theta_j(T \cdot \tau) &= -\omega^2 \prod_{j=1}^4 \Theta_j(\tau) \end{aligned}$$

となることが Proposition 4 より示される。

次に $\Gamma(3)$ の $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ への作用を調べる。

Lemma 4 $a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$ と $g = (g_{jk}) \in \Gamma(3)$ に対して

$$g \cdot (a, b) \equiv (a, b) \pmod{\mathbb{Z}}$$

である。

Proof. $(a, b) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{3}(j, k)$ ($j, k \in \{0, \pm 1\}$) に対して

$$g \cdot (a, b) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}((g_{21} + 1)(g_{22} - 1), (g_{11} - 1)(g_{12} + 1)) + \frac{1}{3}(j, k)g^{-1}$$

である。 g^{-1} も $\Gamma(3)$ の元なので

$$\frac{1}{3}(j, k)g^{-1} \equiv \frac{1}{3}(j, k) \pmod{\mathbb{Z}}$$

である。また、 $\frac{1}{2}((g_{21} + 1)(g_{22} - 1), (g_{11} - 1)(g_{12} + 1))$ の成分が整数とならないための必要十分条件は、 g_{21}, g_{22} がともに偶数となるか、または g_{11}, g_{12} がともに偶数となるかである。しかしこれらの場合は g の行列式が偶数となり $g \in \Gamma(3)$ に反する。□

Lemma 5 $a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$ と $g = (g_{jk}) \in \Gamma(3)$ に対して $\vartheta_{a,b}^3(g \cdot (z, \tau)) / \vartheta_{a,b}^3(z, \tau)$ は a, b の値によらず一定である。

Proof. 前 Lemma より 整数 p, q で $g \cdot (a, b) = (a + p, b + q)$ をみたすものが存在する。ゆえに

$$\frac{\vartheta_{a,b}^3(g \cdot (z, \tau))}{\vartheta_{a,b}^3(z, \tau)} = \frac{\vartheta_{g \cdot (a,b) - (p,q)}^3(g \cdot (z, \tau))}{\vartheta_{a,b}^3(z, \tau)} = \frac{\vartheta_{g \cdot (a,b)}^3(g \cdot (z, \tau))}{\exp[2\pi i a q]^3 \vartheta_{a,b}^3(z, \tau)}$$

となる。 $(a, b) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{3}(j, k)$ に対して q は

$$q = \frac{(g_{11} - 1)(g_{12} + 1)}{2} + \frac{-jg_{12} + k(g_{11} - 1)}{3} \in \mathbb{Z}$$

である。従って

$$\vartheta_{g \cdot (a,b)}(g \cdot (z, \tau)) = \vartheta_{g \cdot (a,b)}(g \cdot (z, \tau)) = \exp(2\pi i a q) \vartheta_{a,b}(g \cdot (z, \tau))$$

であり、

$$\begin{aligned} 2aq &= \frac{(g_{11} - 1)(g_{12} + 1)}{2} + \frac{-jg_{12} + k(g_{11} - 1)}{3} \\ &\quad + \frac{j(g_{11} - 1)(g_{12} + 1)}{3} + 2 \frac{-j^2 g_{12} + jk(g_{11} - 1)}{9} \end{aligned}$$

となる。右辺の第3項は偶数なので

$$\begin{aligned} \exp[2\pi i a q] &= \exp\left[\pi i \frac{(g_{11} - 1)(g_{12} + 1)}{2}\right] \\ &\quad \times \exp\left[\pi i \frac{-jg_{12} + k(g_{11} - 1)}{3}\right] \\ &\quad \times \exp\left[2\pi i \frac{-j^2 g_{12} + jk(g_{11} - 1)}{9}\right] \end{aligned}$$

であり、右辺の第1項は j, k によらず定まる符号であり、第2項は ± 1 で、第3項は $1, \omega, \omega^2$ の値をとる。

$\varepsilon_{a,b}(g)$ は

$$\exp[-\pi i(a, b)g^{-1} \begin{pmatrix} g_{12} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \pi i(ag_{22} - bg_{21})g_{11}g_{12}]$$

であり、

$$\begin{aligned}
-(a, b)g^{-1} \begin{pmatrix} g_{12} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= -\frac{g_{22}g_{12} - 2g_{12}g_{21} + g_{11}g_{21}}{4} \\
&\quad - \frac{(g_{22} - g_{21})g_{12}j + (g_{11} - g_{12})g_{21}k}{3} \\
&\quad - \frac{g_{22}g_{12}j^2 - 2g_{12}g_{21}jk + g_{11}g_{21}k^2}{9}, \\
(ag_{22} - bg_{21})g_{11}g_{12} &= \frac{(g_{22} - g_{21})g_{11}g_{12}}{2} + \frac{(jg_{22} - kg_{21})g_{11}g_{12}}{3},
\end{aligned}$$

より、その値は

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\pi i \frac{2(g_{22} - g_{21})g_{11}g_{12} - g_{22}g_{12} + 2g_{12}g_{21} - g_{11}g_{21}}{4}\right] \\
&\times \exp\left[\pi i g_{12}j \frac{g_{11}g_{22} + g_{21}}{3}\right] \exp\left[-\pi i g_{21}k \frac{g_{11}g_{12} - g_{12}}{3}\right] \\
&\times \exp\left[-\pi i \frac{g_{12}g_{22}j(j+3)}{9}\right] \exp\left[-\pi i \frac{g_{11}g_{21}k(k+3)}{9}\right]
\end{aligned}$$

である。この第1項は j, k によらず定まる1の8乗根であり、第2項は ± 1 で、第3項は $1, \omega, \omega^2$ の値をとる。

$\exp(2\pi i a q)$ と $\varepsilon_{a,b}(g)$ との積が j, k が変化しても1の3乗根のずれしか生じないことを示す。 ± 1 に関する j の関与は

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\pi i \frac{jg_{12}}{3}\right] \exp\left[\pi i g_{12}j \frac{g_{11}g_{22} + g_{21}}{3}\right] \\
&= \exp\left[\pi i \frac{-jg_{12}}{3}\right] \exp\left[\pi i g_{12}j \frac{g_{11}g_{22} + g_{21}}{3}\right] \\
&= \exp\left[\pi i j g_{12} \frac{-1 + g_{11}g_{22} + g_{21}}{3}\right] = \exp\left[\pi i j g_{12} \frac{(g_{12} + 1)g_{21}}{3}\right] = 1
\end{aligned}$$

である。ここで $\det(g) = 1$ より $g_{11}g_{22} - 1 = g_{12}g_{21}$ と $g_{12}(g_{12} + 1)$ が偶数であることを用いている。また ± 1 に関する k の関与は

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\pi i \frac{-k(g_{11} - 1)}{3}\right] \exp\left[-\pi i g_{21}k \frac{g_{11}g_{12} - g_{12}}{3}\right] \\
&= \exp\left[-\pi i (g_{11} - 1)k \frac{g_{21}g_{12} + 1}{3}\right] = \exp\left[-\pi i (g_{11} - 1)k \frac{g_{11}g_{22}}{3}\right] = 1
\end{aligned}$$

である。ここで $g_{21}g_{12} - 1 = g_{11}g_{22}$ と $(g_{11} - 1)g_{11}$ が偶数であることを用いている。従って $\exp(2\pi i a q)\varepsilon_{a,b}(g)$ において j, k の違いは符号に関与することがない。□

Remark 22 Lemma 5 の Proof により $g \in \Gamma(3)$ による $\vartheta_{a,b}(\gamma(z, \tau))/\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ ($a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$) の変換で現れる因子は $\exp[\pi i \frac{g_{21}z^2}{g_{21}\tau + g_{22}}]$ と保型因子 $\sqrt{g_{21}\tau + g_{22}}$ と 1 の 8 乗根 $\kappa(g)$ および

$$\begin{aligned} & \exp[\pi i \frac{2\{(g_{11}-1)(g_{12}+1) + (g_{22}-g_{21})g_{11}g_{12} + g_{12}g_{21}\} - g_{22}g_{12} - g_{11}g_{21}}{4}] \\ \times & \exp[2\pi i \frac{j^2g_{12} - jk(g_{11}-1)}{9}] \exp[-\pi i \frac{g_{12}g_{22}j(j+3) + g_{11}g_{21}k(k+3)}{9}] \end{aligned}$$

である。

$SL_2(\mathbb{Z})$ の主合同部分群 $\Gamma(3)$ の生成元は、 $T^3, ST^3S^{-1}, TST^3S^{-1}T$ であるので、これらの変換の $\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ への作用を計算する。

Proposition 5 $g = T^3, ST^3S^{-1}, TST^3S^{-1}T$ の作用で $\vartheta_{a,b}(g \cdot (z, \tau))$ ($a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$) は $c\xi(z, \tau)\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ となる。ここで $c\xi(z, \tau)$ は下記の値をとる。

a, b	T^3	ST^3S^{-1}	$TST^3S^{-1}T^{-1}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_1$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_2$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$
$\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$
$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$
$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$
$\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_2$
$\frac{-1}{6}, \frac{1}{2}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$
$\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{3\pi i}{4})\xi_2$
$\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_1$	$\exp(\frac{\pi i}{12})\xi_2$

ここで

$$\xi_1 = \exp[\pi i \frac{-3z^2}{-3\tau + 1}] \sqrt{-3\tau + 1}, \quad \xi_2 = \exp[\pi i \frac{-3z^2}{-3\tau + 4}] \sqrt{-3\tau + 4},$$

とし、平方根は実部が正となるように選ぶ。

Proof. Lemma 3 で与えた変換の合成を追跡すればよい。変換 ST^3S^{-1} の作用で現れる平方根

$$\sqrt{-3\tau + 1} = \sqrt{\frac{(T^3S^{-1}) \cdot \tau}{i}} \sqrt{\frac{\tau}{i}} = \sqrt{\frac{-1/\tau + 3}{i}} \sqrt{\frac{\tau}{i}}$$

の枝は、右辺の平方根がともに $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ の元なので、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ にある。変換 $TST^3S^{-1}T^{-1}$ の作用で現れる平方根

$$\sqrt{-3\tau + 4} = \sqrt{\frac{(T^3S^{-1}T^{-1}) \cdot \tau}{i}} \sqrt{\frac{T^{-1} \cdot \tau}{i}} = \sqrt{\frac{-3\tau + 4}{i(-\tau + 1)}} \sqrt{\frac{\tau - 1}{i}}$$

の枝も、右辺の平方根がともに $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ の元なので、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ にある。 \square

Proposition 6 9個の関数 $\vartheta_{a,b}^3(z, \tau)$ ($a, b \in \{\frac{1}{2}, \frac{\pm 1}{6}\}$) で張られる線型空間への $\Gamma(3)$ の作用による9次元射影表現は自明なものになる。

4個の関数 $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}}(0, \tau)$, $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}}(0, \tau)$, $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}}(0, \tau)$, $\vartheta_{\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}}(0, \tau)$, で張られる線型空間への $\Gamma(3)$ の作用による4次元射影表現の $\Gamma(3)$ の生成元の像は

$$\text{diag}(\omega, 1, 1, 1, \dots), \quad \text{diag}(1, \omega, 1, 1, \dots), \quad \text{diag}(1, 1, 1, \omega, \dots)$$

であり $(\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z}))^3$ と同型である、ここで $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ は x_1, \dots, x_n を対角成分とする対角行列を表す。

Proof. Proposition 5 より容易に導ける。 \square

References

- [BL] C. Birkenhake and H. Lange, Cubic theta relations, *J. reine angew. Math.* **407** (1990), 167–177.
- [CM] H. Coxeter and W. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [E] W. Ebeling, *Lattices and Codes*, Vieweg, Wiesbaden, 2002.
- [He] L. Hesse, *Ludwig Otto Hesse's gesammelte Werke*, Chelsea Publishing Co., New York, 1972.
- [Hu] D. Husemöller, *Elliptic Curves*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.

- [I] J. Igusa, *Theta Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [Ka] Y. Kawada, 一変数保型関数の理論 - (I) Fuchs 群, 東大数学教室セミナー・ノート, 4, Tokyo, 1963.
- [Ki] T. Kimura, *Hypergeometric Functions of Two Variables*, Seminar Note in Math. Univ. of Tokyo, 1973.
- [LB] H. Lange and C. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- [M] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Progress in Mathematics 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.
- [MS3Y] K. Matsumoto, M. Saito, T. Sasaki, H. Shiga and M. Yoshida, 超幾何関数早春学校, 北海道大学数学講究録 Series 110, 2006.
- [U] H. Umemura, 楕円関数論 - 楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, Tokyo, 2000.

Keiji MATSUMOTO
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060-0810
Japan
e-mail: matsu@math.sci.hokudai.ac.jp

On regular b -functions of D -modules

Toshinori Oaku

Department of Mathematics, Tokyo Woman's Christian University

January 18, 2007

Abstract

Let M be an algebraic D -module defined on an affine space X and Y be a linear submanifold of X . We give an algorithm to determine if M is regular specializable along Y , and to find, if so, its regular b -function. We also prove that the A -hypergeometric system of Gelfand-Kapranov-Zelevinsky is always regular specializable along the origin.

1 Regular specializability and regular b -functions

Let X be the affine space \mathbb{C}^n with the coordinate system $x = (x_1, \dots, x_n)$ and Y be the linear subvariety defined by $x_1 = \dots = x_d = 0$ with $1 \leq d \leq n$. We denote by \mathcal{D}_X the sheaf on X of linear partial differential operators (of finite order) with holomorphic coefficients. A section P of \mathcal{D}_X is written in a finite sum

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(x) \partial^\alpha = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$

with $a_\alpha(x)$ being holomorphic on an open set of X , where $\partial_i = \partial/\partial x_i$ denotes the partial derivation with respect to x_i , and \mathbb{N} is the set of nonnegative integers. The order of P is defined to be

$$\text{ord } P := \max\{|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \mid a_\alpha(x) \neq 0\}.$$

We define two filtrations on \mathcal{D}_X : The *order filtration* is defined by

$$F_k(\mathcal{D}_X) := \{P \in \mathcal{D}_X \mid \text{ord } P \leq k\} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

and the *V-filtration* with respect to Y is defined by

$$V_k(\mathcal{D}_X) := \left\{ P \in \mathcal{D}_X \mid Pf \in \mathcal{J}^{i-k} \text{ for any } f \in \mathcal{J}^i \text{ and } i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

where \mathcal{J} is the defining ideal of Y in \mathcal{O}_X , the sheaf of holomorphic functions on X . (We set $\mathcal{J}^i = \mathcal{O}_X$ if $i \leq 0$.)

A coherent \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} is said to be *regular specializable* along Y at $p \in Y$ (cf. [L],[S]) if and only if for any germ u of \mathcal{M} at p , there exist a nonzero polynomial $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ and an operator $Q \in \mathcal{D}_X$ defined on a neighborhood of p such that

$$(b(x_1\partial_1 + \cdots + x_d\partial_d) + Q)u = 0, \quad Q \in V_{-1}(\mathcal{D}_X), \quad \text{ord } Q \leq \deg b. \quad (1.1)$$

An equation of this form is essential in proving the convergence of the power series solutions of \mathcal{M} which are formal with respect to x_1, \dots, x_d . A polynomial $b(s)$ satisfying (1.1) is called a *regular b -function* of u along Y at p .

If \mathcal{I} is a left ideal of \mathcal{D} , the stalk of \mathcal{D}_X at $0 \in X$, and $b(s)$ is a regular b -function of the residue class of $1 \in \mathcal{D}$ in \mathcal{D}/\mathcal{I} , then we call $b(s)$ simply a regular b -function of \mathcal{I} and say that \mathcal{I} is regular specializable along Y .

On the other hand, Laurent [L] (see also [LM]) defined the (algebraic) *slopes* of \mathcal{M} along Y at p . It was conjectured in [LM] that \mathcal{M} is regular specializable along Y if and only if there is no slope of \mathcal{M} along Y . (As far as the author knows, this remains to be an open problem.) Assi et al. [ACG] (see also [CT]) presented an algorithm for computing the slopes of \mathcal{M} when \mathcal{M} is algebraic and Y is a hyperplane.

We give some examples of regular b -functions for A -hypergeometric systems of Gelfand-Kapranov-Zelevinsky. In particular, we prove that A -hypergeometric systems are regular specializable along the origin without assuming the homogeneity.

For a left ideal I of the Weyl algebra D , we also give an algorithm for determining if $\mathcal{D}I$ is regular specializable along a linear submanifold of arbitrary codimension, and if so, finding a regular b -function of the minimum degree and an associated operator Q satisfying (1.1). For that purpose, we make use of the homogenization (or the Rees algebra) of D with respect to the order filtration, which we denote by $D^{(h)}$, and (a generalization of) the division algorithm of [GOT] in $D^{(h)}$. Our method consists in calculating what is called the *b -function*, or the *indicial polynomial* in the homogenized ring $D^{(h)}$. Note that an algorithm for computing the usual (i.e. non-homogenized) b -function of a D -module was given in [OT]. Once a regular b -function is found, we can compute an associated operator Q by using the division algorithm.

Remark 1 A regular b -function of the minimum degree is not necessarily unique up to constant multiple.

Example 1 Set $n = 2$, $d = 1$ and let

$$\mathcal{I} := \mathcal{D} \cdot \{\partial_1^2, \partial_1 + \partial_2^2\}$$

be the left ideal of \mathcal{D} generated by $\{\partial_1^2, \partial_1 + \partial_2^2\}$. Then

$$(x_1\partial_1)(x_1\partial_1 - 1 + c) + cx_1\partial_2^2 = x_1^2\partial_1^2 + cx_1(\partial_1 + \partial_2^2)$$

belongs to \mathcal{I} and $cx_1\partial_2^2$ belongs to $V_{-1}(\mathcal{D}) \cap F_2(\mathcal{D})$ for any $c \in \mathbb{C}$. Hence $b(s) = s(s - 1 + c)$ is a regular b -function (of the minimum degree) of \mathcal{I} for any $c \in \mathbb{C}$.

Let $\mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ be the ring of convergent power series. The formal completion of $\mathcal{O}_{X,0}$ along Y is

$$\mathcal{O}_{\widehat{X|Y},0} = \left\{ \sum_{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_d) x_{d+1}^{\alpha_{d+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid a_{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_d) \text{ are holomorphic on some neighborhood } U \subset Y \text{ of } 0 \right\}.$$

Kashiwara and Kawai [KK] proved that if \mathcal{I} is regular specializable along Y , then one has

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^k(\mathcal{D}/\mathcal{I}, \mathcal{O}_{X,0}) = \text{Ext}_{\mathcal{D}}^k(\mathcal{D}/\mathcal{I}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y},0}) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad (1.2)$$

Laurent and Mebkhout [LM] proved that (1.2) holds if and only if \mathcal{I} has no slopes along Y .

2 Regular b -functions of A -hypergeometric systems

Let

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

be an integer $d \times n$ matrix with $\text{rank } A = d$, and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ be a complex d -dimensional vector. The toric ideal I_A is the left ideal of $\mathbb{C}[\partial] = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ generated by $\{\partial^u - \partial^v \mid u, v \in \mathbb{N}^n, Au = Av\}$. We denote by $\langle A\theta - \beta \rangle$ the ideal of $\mathbb{C}[\theta] = \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ generated by

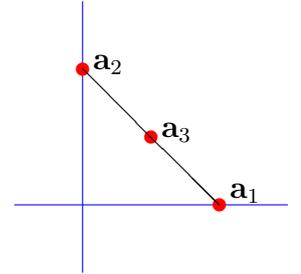
$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j - \beta_i \mid i = 1, \dots, d \right\}$$

with $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) = (x_1 \partial_1, \dots, x_n \partial_n)$. Then the A -hypergeometric ideal $H_A(\beta)$ is defined to be the left ideal of the Weyl algebra $D = D_n = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ which are generated by I_A and $\langle A\theta - \beta \rangle$. The left D -module $D/I_A(\beta)$ is called the A -hypergeometric system.

The following examples were computed by using Kan/sm1, a system for computation in algebraic analysis, developed by N. Takayama.

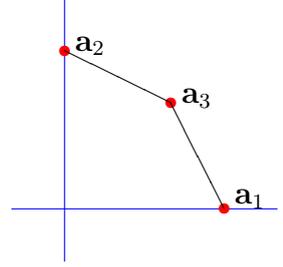
Example 2 Set $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Then $I_A = \langle \partial_1 \partial_2 - \partial_3^2 \rangle$, and the regular b -functions of $H_A(\beta)$ of minimum degree along coordinate submanifolds Y are as follows:

- $Y = \{x_1 = 0\}$: The regular b -function $b_{\text{reg}}(s)$ along Y is $s(2s - \beta_1 + \beta_2)$.
- $Y = \{x_3 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = s(s - 1)$.
- $Y = \{x_1 = x_2 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (2s + \beta_1 - \beta_2)(2s - \beta_1 + \beta_2)$.
- $Y = \{x_1 = x_3 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (2s - \beta_1)(2s - \beta_1 - 1)$.
- $Y = \{0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = 2s - \beta_1 - \beta_2$.



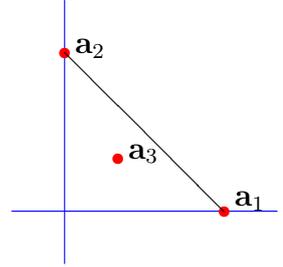
Example 3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_A = \langle \partial_1^2 \partial_2^2 - \partial_3^3 \rangle$.

- $Y = \{x_1 = 0\}$: $\deg b_{\text{reg}}(s) = 4$.
- $Y = \{x_3 = 0\}$: not regular specializable.
- $Y = \{x_1 = x_2 = 0\}$: $\deg b_{\text{reg}}(s) = 4$.
- $Y = \{x_1 = x_3 = 0\}$: not regular specializable.
- $Y = \{0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (6s - 2\beta_1 - \beta_2)(6s - 2\beta_1 - \beta_2 - 3)(6s - \beta_1 - 2\beta_2)(6s - \beta_1 - 2\beta_2 - 3)$.



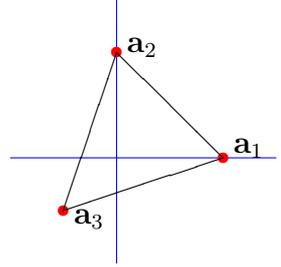
Example 4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I_A = \langle \partial_3^3 - \partial_1 \partial_2 \rangle$.

- $Y = \{x_1 = 0\}$: not regular specializable.
- $Y = \{x_3 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = s(s-1)(s-2)$.
- $Y = \{x_1 = x_2 = 0\}$: not regular specializable.
- $Y = \{x_1 = x_3 = 0\}$:
 $b_{\text{reg}}(s) = (3s - \beta_1)(3s - \beta_1 - 2)(3s - \beta_1 - 4)$.
- $Y = \{0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (3s - \beta_1 - \beta_2)(3s - \beta_1 - \beta_2 - 1)(3s - \beta_1 - \beta_2 - 2)$.



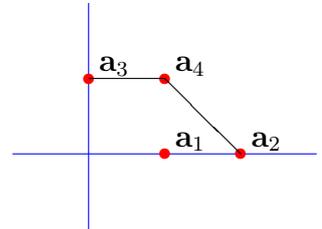
Example 5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $I_A = \langle \partial_1 \partial_2 \partial_3^2 - 1 \rangle$.

- $Y = \{x_1 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = s(2s - \beta_1)(2s - \beta_1 - 1)(2s - \beta_1 + \beta_2)$.
- $Y = \{x_3 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = s(s-1)(s + \beta_1)(s + \beta_2)$.
- $Y = \{x_1 = x_2 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (2s - \beta_1 - \beta_2)(2s - \beta_1 - \beta_2 - 2)(2s - \beta_1 + \beta_2)(2s + \beta_1 - \beta_2)$.
- $Y = \{x_1 = x_3 = 0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (s + \beta_1)(2s - \beta_1)(2s - \beta_1 - 3)(2s - \beta_1 + 3\beta_2)$.
- $Y = \{0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (2s - \beta_1 - \beta_2)(2s - \beta_1 - \beta_2 - 4)(2s - \beta_1 + 3\beta_2)(2s + 3\beta_1 - \beta_2)$.



Example 6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_A = \langle \partial_1^2 - \partial_2, \partial_1 \partial_3 - \partial_4, \partial_2 \partial_3 - \partial_1 \partial_4 \rangle$.

- Regular specializable along $x_1 = 0$, $x_3 = 0$,
 $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$, $x_1 = x_4 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$
 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$,
 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
 - Not regular specializable along $x_2 = 0$, $x_4 = 0$,
 $x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$,
 $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
 - $Y = \{0\}$: $b_{\text{reg}}(s) = (s - \beta_2)(2s - \beta_1 - \beta_2)(2s - \beta_1 - \beta_2 - 1)$.
- An associated $Q \in V_{-1}(D) \cap F_3(D)$ such that



$$b_{\text{reg}}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - Q \in H_A(\beta)$$

is

$$Q = -2x_1^2x_2\partial_2^2 + 6x_1^2x_3\partial_2\partial_3 + 4x_1x_2x_3\partial_2\partial_4 - 12x_1x_3^2\partial_3\partial_4 \\ - 14x_1x_3x_4\partial_4^2 + 2x_2x_3^2\partial_4^2 + 2\beta_1x_1^2\partial_2 - 2\beta_2x_1^2\partial_2 + 14\beta_2x_1x_3\partial_4 - 10x_1x_3\partial_4.$$

(In fact, $Q \in F_2(D)$.)

Theorem 1 *Assume $\text{rank } A = d$. Then $H_A(\beta)$ is regular specializable along $\{0\}$ for any $\beta \in \mathbb{C}^d$. In particular,*

$$\text{Ext}^k(D/H_A(\beta), \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}) = \text{Ext}^k(D/H_A(\beta), \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]])$$

holds for any integer k , where $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ denotes the formal power series ring.

3 Homogenization of the ring of differential operators

In order to prove Theorem 1 as well as to deduce algorithms for computing the regular b -function and an associated operator, we work in the Weyl algebra, i.e., the ring of differential operators with polynomial coefficients $D = D_n$. The following constructions are also valid for the ring \mathcal{D} of differential operators with convergent power series coefficients.

We introduce the homogenized ring $D^{(h)}$ of D with respect to the order filtration. That is, $D^{(h)}$ is a \mathbb{C} -algebra generated by $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ and h with the commutation relations

$$\partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij} h, \quad x_i x_j = x_j x_i \\ \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i, \quad \partial_i h = h \partial_i, \quad x_i h = h x_i$$

for $1 \leq i, j \leq n$. Then $D^{(h)}$ is a (non-commutative) graded ring with respect to the following weights:

$$\frac{x_1 \quad \cdots \quad x_n \quad \partial_1 \quad \cdots \quad \partial_n \quad h}{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1}$$

The homogeneous part of degree m of $D^{(h)}$ is the set $(D^{(h)})_m$ consisting of 0 and the homogeneous operators of $D^{(h)}$ of weight m .

The homogenization of an element $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ of D is defined to be

$$P^{(h)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(x) \partial^\alpha h^{m-|\alpha|} \in \mathcal{D}^{(h)} \quad (m := \text{ord } P).$$

The homogenization $I^{(h)}$ of a left ideal I of D is the left ideal of $D^{(h)}$ generated by $\{P^{(h)} \mid P \in I\}$, which is homogeneous with respect to the above weights.

The V-filtration of $D^{(h)}$ with respect to Y is defined by

$$V_k(D^{(h)}) := \left\{ P = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \nu \in \mathbb{N}} a_{\alpha, \beta, \nu} x^\alpha \partial^\beta h^\nu \in D^{(h)} \mid a_{\alpha, \beta, \nu} \in \mathbb{C}, \right. \\ \left. a_{\alpha, \beta, \nu} = 0 \text{ if } \beta_1 + \cdots + \beta_d - \alpha_1 - \cdots - \alpha_d > k \right\}$$

For an element P of $D^{(h)}$, we define its V-order $\text{ord}_V(P)$ to be the minimum integer k such that $P \in V_k(D^{(h)})$. For a left ideal I' of $D^{(h)}$, its V-graded ideal is

$$\text{gr}^V(I') := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (V_k(D^{(h)}) \cap I') / (V_{k-1}(D^{(h)}) \cap I'),$$

which is a left ideal of the V-graded ring

$$\text{gr}^V(D^{(h)}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(D^{(h)}) / V_{k-1}(D^{(h)}) \simeq D^{(h)}.$$

Lemma 1 *Let I be a left ideal of D . Then $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ is a regular b-function of $\mathcal{I} := \mathcal{D}I$ along $Y := \{x_1 = \cdots = x_d = 0\}$ if and only if there exist a homogeneous $b'(s, h) \in \mathbb{C}[s, h]$ with $b'(s, 0) \neq 0$ and $b'(s, 1) = b(s)$, an operator $Q' \in (D^{(h)})_m \cap V_{-1}(D^{(h)})$ with $m := \deg b(s)$, and a polynomial $a(x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_{d+1}, \dots, x_n]$ such that*

$$a(x_{d+1}, \dots, x_n) b'(x_1 \partial_1 + \cdots + x_d \partial_d, h) + Q' \in I^{(h)}$$

and $a(0, \dots, 0) \neq 0$.

4 Sketch of the proof of Theorem 1

First let us recall the definition of the characteristic variety of a D -module. For an element $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \in D$ with $m = \text{ord } P$, its *principal symbol* is defined to be

$$\sigma(P)(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} \in \mathbb{C}[x, \xi].$$

The *characteristic variety* of a left ideal I of D (or of D/I , strictly speaking) is

$$\text{Char}(I) := \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \sigma(P)(x, \xi) = 0 \ (\forall P \in I)\}.$$

Let $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ be an integer $d \times n$ matrix with $\text{rank } A = d$. Let Δ_A be the convex hull of the set $\{0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, and let \mathcal{F}_A be the set of the facets of Δ_A which do not contain the origin.

Lemma 2 (Adolphson)

$$\text{Char}(D \cdot I_A) \subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}_A} \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \xi_i = 0 \text{ if } \mathbf{a}_i \notin \gamma\}.$$

Proof: This inclusion follows directly from (the proof of) Lemma 3.2 of Adolphson [A].
 \square

For example, if $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, then the toric ideal I_A is generated by $\{\partial_1^2 - \partial_2, \partial_1\partial_3 - \partial_4, \partial_2\partial_3 - \partial_1\partial_4\}$ and we have

$$\text{Char}(D \cdot I_A) \subset \{\xi_1 = \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = \xi_3 = 0\}.$$

For a left ideal I' of $D^{(h)}$, we define its *distraction* to be

$$\text{dist}(I') := \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n, h] \cap I'$$

with $\theta_i = x_i\partial_i$ slightly modifying the definition given in [SST]. Then from the preceding lemma it follows that

$$\text{dist}((D \cdot I_A)^{(h)}|_{h=0}) \supset \bigcap_{\gamma \in \mathcal{F}_A} \langle \theta_i(\theta_i - h) \cdots (\theta_i - (N_{\gamma,i} - 1)h) \mid \mathbf{a}_i \notin \gamma \rangle$$

with some $N_{\gamma,i} \in \mathbb{N}$. Define an ideal J of $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n, h]$ by

$$J := \text{dist}((D \cdot I_A)^{(h)}|_{h=0}) + \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n, h] \langle A\theta - \beta h \rangle.$$

Then we have

$$J \subset \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n, h] \cap \text{gr}^V(H_A(\beta)^{(h)})$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(J) &\subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}_A} \left\{ (\theta, h) \mid \theta_i(\theta_i - h) \cdots (\theta_i - (N_{\gamma,i} - 1)h) = 0 \text{ if } \mathbf{a}_i \notin \gamma, \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^n a_{ij}\theta_j = \beta_i h \quad (i = 1, \dots, d) \right\} \\ &\subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}_A} \bigcup_{j=1}^{N_\gamma} \{(\theta, h) \mid \theta_1 + \cdots + \theta_n = c_{\gamma,j}h\} \end{aligned}$$

with some $N_\gamma \in \mathbb{N}$ and $c_{\gamma,j} \in \mathbb{C}$. Theorem 1 follows from these inclusions.

5 Algorithms

Our algorithm for regular b -functions are based on the following division algorithm, which is a slight generalization of the one given in [GOT]:

Algorithm 1 (Division algorithm in $D^{(h)}$) Let \prec be an arbitrary monomial ordering for $D^{(h)}$.

- Input: P, P_1, \dots, P_m : homogeneous elements of $D^{(h)}$.
- Output: homogeneous $Q_1, \dots, Q_m \in D^{(h)}$ and $a \in \mathbb{C}[x]$ such that

- (1) $(1 + a)P = Q_1P_1 + \cdots + Q_mP_m + R$,
- (2) $a \prec 1$,
- (3) If $R \neq 0$, then its leading monomial $\text{LM}_{\prec}(R)$ is not divisible by any $\text{LM}_{\prec}(P_i)$,
- (4) $\text{LM}_{\prec}(Q_iP_i) \preceq \text{LM}_{\prec}(P)$ if $Q_i \neq 0$.

This algorithm enables us to compute a Gröbner (or a standard) base of $I^{(h)}$ with respect to a monomial ordering which is compatible with the V -filtration. Then we obtain a set of generators of the ideal

$$J := \text{gr}^V(I^{(h)}) \cap \mathbb{C}[x_{d+1}, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_d, h].$$

Then by using primary decomposition, we can find the “localized intersection”

$$\mathbb{C}[[x_{d+1}, \dots, x_n]][\theta_1, \dots, \theta_d, h]J \cap \mathbb{C}[\theta_1 + \cdots + \theta_d, h]$$

as in Algorithm 4.6 of [OT]. Thus we get the following

Theorem 2 *Let \mathcal{I} be a left ideal of \mathcal{D} generated by elements of the Weyl algebra D . Then*

- (1) *There exists an algorithm to compute the regular b -functions of \mathcal{I} .*
- (2) *If $b(s)$ is a regular b -function of \mathcal{I} , then there exist (and we can compute) a $Q \in V_{-1}(D) \cap F_m(D)$ and $a(x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_{d+1}, \dots, x_n]$ such that $a(0) \neq 0$ and*

$$a(x_{d+1}, \dots, x_n)b(x_1\partial_1 + \cdots + x_d\partial_d) + Q \in \mathcal{I}.$$

The latter part of this theorem follows from the following

Proposition 1 *Let I be a left ideal of D and \prec be a monomial ordering of $D^{(h)}$ which is compatible with the V -filtration, i.e.,*

$$x^\alpha \partial^\beta h^\nu \prec x^{\alpha'} \partial^{\beta'} h^{\nu'} \quad \Rightarrow \quad \text{ord}_V(x^\alpha \partial^\beta h^\nu) \leq \text{ord}_V(x^{\alpha'} \partial^{\beta'} h^{\nu'}).$$

Suppose that $\{P_1, \dots, P_r\}$ is a Gröbner (or a standard) base of $I^{(h)}$ w.r.t. \prec . Let $b(s)$ be a regular b -function of $\mathcal{D} \cdot I$ and $b'(s, h)$ be the homogeneous polynomial such that $b'(s, 1) = 1$ and $b'(s, 0) \neq 0$. Dividing $b'(\theta_1 + \cdots + \theta_d, h)$ by P_1, \dots, P_r , we get an expression

$$(1 + a)b'(\theta_1 + \cdots + \theta_d, h) = Q_1P_1 + \cdots + Q_mP_m + R$$

with the conditions (2),(3),(4) in Algorithm 1. Then one has $R \in (D^{(h)})_m \cap V_{-1}(D^{(h)})$ with $m := \deg b(s)$ and

$$b(\theta_1 + \cdots + \theta_d) - (1 + a)^{-1}R|_{h=1} \in \mathcal{D} \cdot I.$$

References

- [A] Adolphson, A., Hypergeometric functions and rings generated by monomials. *Duke Math. J.* **73** (1994), 269–290.
- [ACG] Assi, A., Castro-Jiménez, F.J., Granger, M., How to compute the slopes of a \mathcal{D} -module. *Compositio Mathematica* **104** (1996), 107–123.
- [CT] Castro-Jiménez, F.J., Takayama, N., Singularities of the hypergeometric system associated with a monomial curve. *Transactions of American Mathematical Society* **355** (2003), 3761–3775.
- [GOT] Granger, M., Oaku, T., Takayama, N., Tangent cone algorithm for homogenized differential operators. *J. Symbolic Computation* (in press).
- [KK] Kashiwara, K., Kawai, T., On holonomic systems of micro-differential operators III. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **17** (1981), 813–979.
- [L] Laurent, Y., Polygone de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **20** (1987), 391–441.
- [LM] Laurent, Y., Mebkhout, Z., Pentés algébriques et pentés analytiques d’un \mathcal{D} -module. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **32** (1999), 39–69.
- [OT] Oaku, T., Takayama, N., Algorithms for D -modules — restriction, tensor product, localization, and local cohomology groups. *J. Pure Appl. Algebra* **156** (2001), 267–308.
- [S] Sabbah, C., D -modules et cycles évanescents. In: ‘Géométrie algébrique et applications, III’ (Travaux en cours, 24), J.-M. Aroca, T. Sanchez-Giralda, J.-L. Vicente, eds, Hermann, Paris, 1987, pp. 53–98.
- [SST] Saito, M., Sturmfels, B., Takayama, N.: “Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations”, *Algorithms and Computation in Mathematics*, vol. 6, Springer, 1999.