$$\frac{p^u}{u!}\frac{1}{Z(\beta;p)}, \quad Z(\beta;p) = \sum_{u \text{ の行和列和は } \beta} \frac{p^u}{u!}$$

2×2 分割表 u (2×2 行列, 非負整数成分) の周辺和 (行の和、列の和のこと) として $\beta = (u_{11}, u_{21} + u_{22}, u_{11} + u_{21}, u_{22})$ となるものを考える．これは次のような分割表の周辺和である．

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ (i = 0, 1, 2, \cdots, n = \min\{u_{11}, u_{22}\})$$

このとき正規化定数は

$$\begin{aligned} Z(\beta;p) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{p_{11}^{u_{11}-i} p_{12}^{i} p_{21}^{u_{21}+i} p_{22}^{u_{22}-i}}{(u_{11}-i)!(i)!(u_{21}+i)!(u_{22}-i)!} \\ &= \frac{p_{11}^{u_{11}} p_{21}^{u_{21}} p_{22}^{u_{22}}}{u_{11}!u_{21}!u_{22}!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-u_{11})_i(-u_{22})_i}{(u_{21}+1)_i(1)_i} \left(\frac{p_{12}p_{21}}{p_{11}p_{22}}\right)^i \end{aligned}$$

となる．よって対応する超幾何級数は Gauss の超幾何級数

$${}_2F_1(a,b,c;x) = \sum_{i=0} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i(1)_i} x^i$$

統計と超幾何関数

1. セル u_{ij} の期待値 $E_{ij} = p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \log Z(\beta; p)$.
2. p の最尤推定 (maximal likelihood estimation, MLE): セルのデータ $= U_{ij}$ を期待値としてもつような p の値. つまり 1 の逆像計算. 別の言い方では, $\frac{p^U}{U!} \frac{1}{Z}$ を最大にする p (log 微分をすると, 期待値とデータが等しいという式を得る).
3. モデル M の検定. モデル M は p 空間の多様体 $\mathcal{M}$ とする. $\mathcal{M}$ の上に p があるとしての $\frac{p^U}{U!} \frac{1}{Z}$ の最大値と, 制約のない場合の最大値の比較でモデルに fit しているか調べる. (尤度比検定).

超幾何関数 Z のどんな研究が必要か?

1. Z や Z の偏微分の数値計算.
2. Z の β, p についての大域挙動.
3. Z の公式はそれぞれ使い道あり.

たとえば分割表の χ^2 検定では, $|\beta| \to \infty$ の挙動を用いてズレの程度を評価する表を計算している.

一般に Z の計算は難しいので, Monte Carlo 法で代用するのが統計計算の主流.