特殊関数と組み合わせ論

高山信毅

この小文では、Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky による行列式と 2 次扇に関する理論を紹介したい。題名と何の関係もないとおもわれるかもしれないが、実は密接な関係があり、それは本文中で明らかになる。

1 アメーバ

f を k変数 $x_1, \ldots, x_k$ の ローラン多項式とする。ここでローラン多項式とは x_i 達の負べキもゆるす多項式のことである。$f = 0$ となるような $(\mathbf{C}^*)^k$ の点全体を Z_f とあらわす。f の $(\mathbf{C}^*)^k$ における 0 点集合 Z_f を写像

$$\begin{aligned} \log \quad : \quad & (x_1, \ldots, x_k) \\ & \longmapsto (\log|x_1|, \ldots, \log|x_k|) \in \mathbf{R}^k \end{aligned}$$

で写した像を $\log(Z_f)$ と書き、 ローラン多項式のアメーバ (amoeba) とよぶ。アメーバはたとえば図 1 のような形をもつ。アメーバの補集

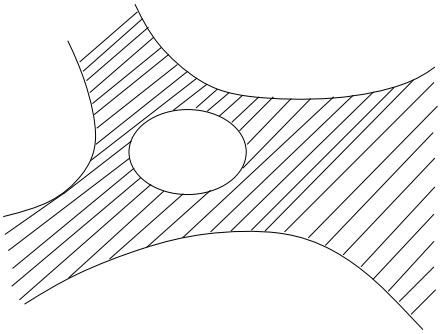

図 1:

合 $\mathbf{R}^k \setminus Z_f$ は凸集合からなる連結成分に分解することが知られている。ここでは連結成分のな

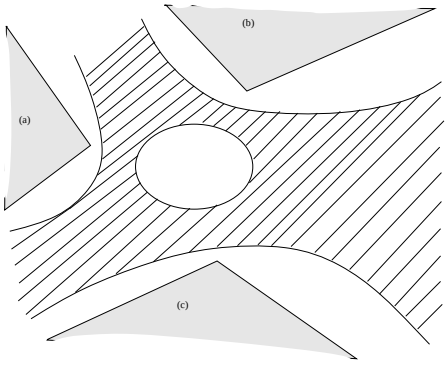

図 2:

かで有界でないもの、つまり図 2 (a)(b)(c) のように無限にのびているアメーバの補集合の連結成分に注目したい。無限にのびているアメーバの補集合は何個あるだろうか？実はこの問題に関しては次のようによく知られた解答がある (たとえば [GKZ; 196p])。

定理 1. アメーバの補集合の連結成分で有界でないものの個数と f のニュートン多面体の頂点の個数が一致する。つまり、$f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha$ とかけるとき A の凸包の頂点の数とアメーバの補集合の連結成分で有界でないものの個数が一致する。

では、ひとつアメーバの実例を鑑賞しておこう。このアメーバは肉の無い骨だけ？のアメーバであるが超幾何関数 F_1 に関係する重要な例である。

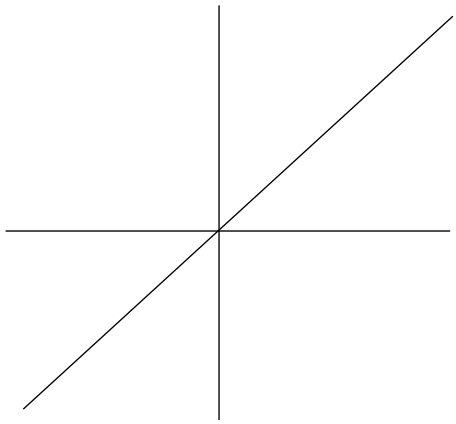

図 3:

例 1. $f(x,y)=xy(x-1)(y-1)(x-y)$ とおくとき f のアメーバは図 3 のような形となる。このとき、アメーバの補集合は 6 つの連結成分を持ちすべて非有界である。

2 主 A-行列式 E_A

第 1 節では、アメーバの形がニュートン多面体と関係していることをみた。以下の節では主 A-行列式 E_A なる多項式のアメーバの形およびニュートン多面体の形を調べてみたい。主 A-行列式 (principal A-determinant) というのは高校で習う判別式 b^2-4ac の一般化であり、また A-超幾何関数の特異点集合をあらわす式である。

主 A-行列式の定義をする前に、高校で習う判別式の復習、とくに高校判別式の意味をまず思い出してみよう。“判別式 $=0$ は 2 次方程式 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ が重根をもつ必要十分条件” これが高校で強調される判別式の意味であるが、これを別の見方でみると、“判別式 $=0$ は 2 次方程式 $f(x)=0$ と 1 次方程式 $f'(x)=2ax+b=0$ が共通根をもつ必要十分条件 ” である。この見方を一般化しよう。

A を $\mathbf{Z}^{k-1}$ の元の有限集合とし $\mathbf{Z}A$ が $\mathbf{Z}^{k-1}$ と同形であるとする。たとえば

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

などを A として想定しておく。f を A でさだまる ローラン多項式$\sum_{\omega\in A}a_\omega x^\omega$ とする。ここで $x^\omega=x_1^{\omega_1}\cdots x_{k-1}^{\omega_{k-1}}$ である。この多項式は $\#A$ 個の不定元 $\{a_\omega\}$ を係数にもつ、$k-1$ 変数の ローラン多項式である。係数の空間は $\mathbf{C}^{\#A}$ と同形であるが、これを $\mathbf{C}^A$ と書くことにしよう。

さて今このような A が k 個あるとし、それらを $A_1,\dots,A_k$ と書く。$(A_1,\dots,A_k)$-混合終結式 $R_{A_1,\dots,A_k}$ とは、直感的にいうと k個の方程式

$$f_i=\sum_{\omega\in A_i}a_\omega^i x^\omega=0 \tag{2.1}$$

が共通根を持つための $\{a_\omega^i\}$ 達の条件式のことである。これをきちんと定義しよう。$\nabla^0_{A_1,\dots,A_k}\subset\prod_{i=1}^k(\mathbf{C})^{A_i}$ を x についての連立方程式 (2.1) が $(\mathbf{C}^*)^{k-1}$ に解をもつような係数 $\{a_\omega^i\}$ 全体の集合とする。$\nabla^0_{A_1,\dots,A_k}$ の閉包がちょうど 1 個の多項式の 0 点集合としてかけるとき、その多項式を $R_{A_1,\dots,A_k}(f_1,\dots,f_k)$ と書き、$(A_1,\dots,A_k)$-混合終結式とよぶ。

たとえば、$A_1=\{0,1,2\}\subset\mathbf{Z}^1$, $A_2=A_1$ のときは、

$$\begin{aligned}f_1 &= a_2^1x^2+a_1^1x+a_0^1\\ f_2 &= a_2^2x^2+a_1^2x+a_0^2\end{aligned}$$

が共通根をもつ条件であり、通常の終結式

$$R_{A_1,A_2}(f_1,f_2)=\begin{vmatrix}a_2^1 & a_1^1 & a_0^1 & 0\\ 0 & a_2^1 & a_1^1 & a_0^1\\ a_2^2 & a_1^2 & a_0^2 & 0\\ 0 & a_2^2 & a_1^2 & a_0^2\end{vmatrix} \tag{2.2}$$

が混合終結式にほかならない。

例をもっと見るために補足しておくと、混合終結式を実際ながめてみたかったら、グレブナ基底を計算できる数式処理システムを用いるのが一番お手軽である。単項式の間の順序を x_i 達が a_ω^j 達より大きくなるような辞書式順序にえらんで f_i 達のグレブナ基底を計算したとき、(a_ω^j のみの式) $\times$ (x の単項式) がでてくれば、この式より x の単項式をおとしたものが、混合終結式である。たとえば、上の例では f_1, f_2 を入力多項式として $x > a_j^i$ なる順序でグレブナ基底を計算すると、基底のなかに $R_{A_1,A_2}(f_1, f_2)$ がある。ただし、できるといってもこれは原理的にできるというだけで、A_j 達をちょっと大きくすれば、とたんにグレブナ基底の計算は天文学的時間を要するようになってしまう。実際にためしてみてその感覚をつかむのも有意義であろう。

さて、この混合終結式をもちいると主 A-行列式 E_A は次のように定義できる。A を $\mathbf{Z}^{k-1}$ の点の有限集合とするとき、

$$E_A(f) = R_{A,\ldots,A}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, x_{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, f\right)$$

と定義する。

たとえば高校判別式を主 A-行列式とみなすには A として $\{0,1,2\}$ をとればよい。$f = ax^2 + bx + c$, $x\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax^2 + bx + 0$ となるので、(2.2) に代入して $E_A(f) = ac(b^2 - 4ac)$ を得る。

さて、以下 A としてはさらに次の条件をみたすものをとろう。

(2.3) ある $c \in \mathbf{Z}^{k-1}$ が存在して A の任意の元 ω と内積をとると 1 となる。

$$\mathbf{R}_{\geq 0}A \cap \mathbf{Z}^{k-1} = \mathbf{Z}_{\geq 0}A, \tag{2.4}$$

ここで、$\mathbf{R}_{\geq 0}$ は 0 または正の実数、$\mathbf{Z}_{\geq 0}$ は 0 または正の整数である。

条件 (2.4) は、あとで説明する A に対応するトーリック多様体が正規 (normal) となるための条件である。なおこの条件をおとして議論をすすめることは重要であるが、よくわかっていないことが多い。条件 (2.3) (2.4) をみたす A として重要な例をひとつあげておこう。この例は、配置空間のコンパクト化の問題や (k,n) 型超幾何関数に深く関係している ([K], [AK])。

例 2. $e_0 = 0$ を $\mathbf{R}^p$ の零ベクトル、$e_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^p, e_2 = (0,1,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^p, \cdots, f_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^{q+1}, f_2 = (0,1,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^{q+1}, \cdots$ とおく。このとき、点集合 $\{e_i \times f_j \in \mathbf{R}^{p+q+1} \,|\, 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q+1\}$ を $\Delta_p \times \Delta_q$ と書くことにする。$\Delta_p \times \Delta_q$ の凸包は、p 単体と q 単体の直積になっていることより、この記号法を用いている。さて、$E_{\Delta_p \times \Delta_1}$ は定義より $(p+1)\times(q+1)$ 変数 $\{u_{ij} \,|\, 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q+1\}$ の多項式となる。$p \leq q$ と仮定しよう。このとき $E_{\Delta_p \times \Delta_q}$ は、$\{u_{ij}\}$ を $(p+1)\times(q+1)$ 行列とみなしたときのすべての $k \times k$ $(1 \leq k \leq p+1)$ 小行列式の積となることが知られている ([GKZ; 300p])。

さて、$E_{\Delta_p \times \Delta_q}$ のニュートン多面体はどんな形をしているのであろうか? 実は、このように、主 A 行列式の具体形がわかっていても、$E_{\Delta_p \times \Delta_q}$ のニュートン多面体（またはアメーバ）についてはあまりよくわかっていない。例外として、$E_{\Delta_1 \times \Delta_q}$ のニュートン多面体は完全にわかっていて $(q+1)!$ 個の頂点をもつ、ゾノトープである。この多面体はとくに permutahedron なる名前がついている（図 4 をみよ。これは $E_{\Delta_1 \times \Delta_3}$ のニュートン多面体)。

例として、$E_{\Delta_1 \times \Delta_2}$ のニュートン多面体を計算してみよう。例 2 でのべた座標を用いると、

$$\begin{aligned} & E_{\Delta_1 \times \Delta_2} \\ = \; & \prod_{0 \leq i \leq 1, 1 \leq j \leq 3} u_{ij} \prod_{1 \leq i < j \leq 3} \begin{vmatrix} u_{0i} & u_{0j} \\ u_{1i} & u_{1j} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

である。ここで、$x = \frac{u_{02}u_{11}}{u_{01}u_{12}}$, $y = \frac{u_{03}u_{11}}{u_{01}u_{13}}$ とおくと、$E_{\Delta_1 \times \Delta_2}$ は (u_{ij} の単項式) $\times (1-x)(1-$

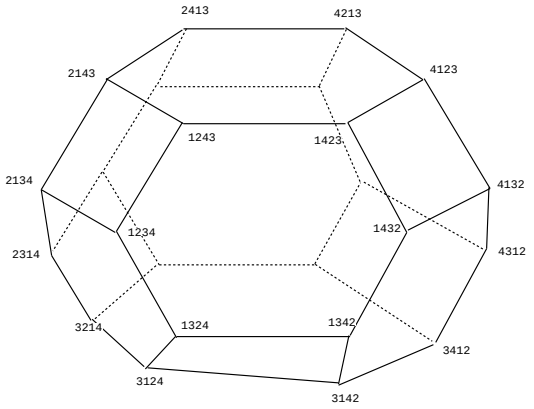

図 4:

$y)(x-y)$ なる形となる。したがって、$E_{\Delta_1\times\Delta_2}$ のニュートン多面体は $\mathbf{R}^6$ の中の 2 次元多面体であり、一次変換で $(1-x)(1-y)(x-y)$ のニュートン多面体にうつすことができることがわかる。これは六角形であり、そのアメーバは例 1 (図 3) でみたような恰好をしている。

この節を終わる前に主 A 行列式のトーリック多様体を用いた意味付けをみておこう。以下、$A=\{\omega^1,\ldots,\omega^n\}$ と書けるとしよう。このとき、代数多様体 X_A を

$$\{(x^{\omega^1},\ldots\quad,\quad x^{\omega^n})\,|\,x\in(\mathbf{C}^*)^{k-1}\}$$
$$\text{のザリスキー閉包}\ \subseteq\mathbf{P}^{n-1}$$

で定義する。X_A はトーリック多様体 (toric variety) である ([F][Od])。トーリック多様体 X_A は $(\mathbf{C}^*)^{k-1}$ をザリスキー開集合として含む。さらに、X_A は集合としては、いろいろな次元 d の複素トーラス $(\mathbf{C}^*)^d$ の disjoint union として書けることが知られている。

X_A と $\mathbf{P}^{n-1}$ の内の k 枚の超平面 $\ell_1=\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j=0,\ldots,\ell_k=\sum_{j=1}^n a_{kj}y_j=0$ のまじわりを考えよう。$k-1$ 次元の多様体 X_A を k 枚の超平面で切るわけであるから、まじわりは一般的には空であるが、係数が特別な条件をみたすときは、まじわりが存在する。まじわりが存在するための条件を (a_{ij} の多項式) $=0$ として書いたときの、多項式部分を X_A の Chow 形式といい、$\tilde{R}_{X_A}(a_{ij})$ と書く (これは直感的な説明なので、厳密に定義するには主 A 行列式の場合と同じようにやる必要がある)。

y_j に x^{ω^j} を代入すれば $\tilde{R}_{X_A}$ は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x^{\omega^j}=0\quad(i=1,\ldots,k)$$

が共通根を持つ条件にほかならない。したがって $\tilde{R}_{X_A}$ は $(A,\ldots,A)$-混合終結式にほかならない。つまり、主 A 行列式のトーリック多様体を用いた解釈を得たことになる。はじめの主 A 行列式の定義に人工的なものを感じたかも知れないが、こう解釈するときわめて自然である。

3 正則三角形分割

前節では主 A 行列式 E_A を定義した。E_A のニュートン多面体 (またはアメーバ) の形を調べたいのであるが、そのために、正則三角形分割 (regular triangulation, 最近は coherent triangulation) なる概念を導入しよう。先走りしておくと、正則三角形分割全体により、E_A のニュートン多面体が記述できるという結果がなりたつ。

点集合としては前節の $A=\{\omega^1,\ldots,\omega^n\}$ をとろう。いま、重み (weight)

$$w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbf{R}^n$$

が与えられたとき、$\mathbf{R}^k$ の n 個の点の集合 $A_w=\{(\omega^1,w_1),\ldots,(\omega^n,w_n)\}$ を考えよう。p を $\mathbf{R}^k\ni(c_1,\ldots,c_n)\longmapsto(c_1,\ldots,c_{n-1})\in\mathbf{R}^{k-1}$ なる射影とする。A_w の凸包を考え、n 番目の座標に注目して、凸包を上側と下側に分ける。つまり、$p(c)=p(c')$ なる凸包の境界の 2 点 c,c' があったとき、$c_n>c'_n$ なら c'_n を下側の点、c_n を上側の点とよぶ。このとき、凸包

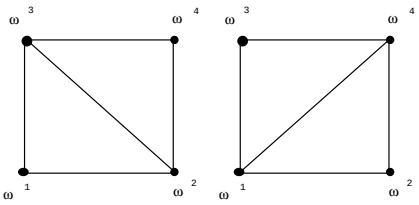

図 5: (a) (b)

の下側を p で $\mathbf{R}^{k-1}$ に射影すれば、A の多面体分割をえる。とくにこの多面体分割が単体分割になっているとき、これを A の正則三角形分割という。

たとえば、図 5 (a) (b) のように A として平面上の 4 点を考えよう。

重み w を $w_1, w_4 >> w_2 = w_3$ となるように選べば図 5 (a) の三角形分割が、重み w を $w_2, w_3 >> w_1 = w_4$ となるように選べば図 5 (b) の三角形分割が得られる。

さて、正則三角形分割の理論的考察に戻ろう。ここでは正則三角形分割全体を数え上げる問題を考えたい。T を A の正則三角形分割とする。T を実現するような重み全体

$$C(A,T) = \{w \in \mathbf{R}^n \mid w \text{ は } T \text{ を } A_w \text{ の下側凸包の射影として実現}\}$$

は、開凸多面錐 (open convex polyhedral cone) となっていることが証明できる。さらに強く C の閉包とその面 (face) をすべてもってきて、T をすべての正則三角形分割全体をうごかすと、これは、$\mathbf{R}^n$ 全体をおおう扇 (fan) となることが証明できる。この扇のことを、A の 2 次扇 (secondary fan) とよぶ。2 次扇という訳は、小田忠雄先生の訳であろうとおもうが、これに当て字をすると、虹扇（にじ扇）となる。なかなかおもしろい。現在、2 次扇はさまざまな分野を結び付ける “虹” のかけ橋となりつつある。

2 次扇の例をあげておこう。プリズム $A = \Delta_1 \times \Delta_2$ の 2 次扇の形は 図 $3 \times \mathbf{R}^4$ と同形になり、全部で 6 つの最大次元の錐がある。この 6 つの錐が、A の 6 つの正則三角形分割に対応する。

2 次扇の構造については、かなり簡単な点集合 A の場合すらもあまりよくわかっていない。たとえば、$\Delta_p \times \Delta_q$ の 2 次扇について理論的に完全にわかっているのは、$\Delta_1 \times \Delta_q$ の場合のみである。この場合は $(q+1)!$ 個の正則三角形分割があり、また任意の（頂点を増やさない）三角形分割は正則である。あと計算機によって数え上げられているのは、$\Delta_2 \times \Delta_2$ (108 個の正則三角形分割、また任意の頂点を増やさない三角形分割は正則である)、$\Delta_2 \times \Delta_3$ (4488 個の正則三角形分割 (J. DeLoera)) および$\Delta_2 \times \Delta_4$ (376200 個の正則三角形分割 (J. DeLoera)) の場合のみであり、$\Delta_3 \times \Delta_3$ は現在までの計算幾何の研究に立脚した数え上げアルゴリズム研究の成果と現在の計算機の能力で、手の届きそうなところにあるのだが、まだ数えあげに成功したという報は聞いていない。

さて、以上で準備が終了した。Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky による記念すべき定理を紹介しよう。

定理 2. ([GKZ; 302p]) 主 A 行列式 E_A のニュートン多面体の頂点と A の 2 次扇の最大次元錐が 1 対 1 対応をする。

この定理の発見ののち、さまざまな方向に、さまざまな分野の研究がすすむことになる。上の定理の証明には（わたしにとってはとってもハードな）代数幾何的に精密な議論をする必要があるが、それは 本 [GKZ] を読んでいただくことにして、次の節では、この定理が成立しそうだという、私なりの説明を試みることにする。ここで、ようやく表題の特殊関数が登場することとなる。実をいうと、Gel'fand 達の行列式の研究の出発点は、特殊関数 · 超幾何関数であった。ここを出発点として、主 A 行列式、三角

形分割の組み合せ論が発見されたのである。

4 A-超幾何方程式系

$A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ とし、a_i を $\mathbf{Z}^{d-1}$ のたてベクトルとおもって、ならべて作った行列を A と書く。A の ij成分を a_{ij} と書く。天下りになるが、$\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}$ をパラメータとするとき、f を未知関数とする次の偏微分方程式系を A-超幾何方程式系とよぶ。

(4.1)
$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\partial_i-\alpha_i)f &= 0,\\ (i=1,\ldots,d-1)&\\ \Box_b f &= 0,\\ (b=(b_1,\ldots,b_n) &\in \ker A\cap\mathbf{Z}^n)\end{aligned}$$

ここで、

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \Box_b=\prod_{b_i>0}(\partial_i)^{b_i}-\prod_{b_j<0}(\partial_j)^{-b_j}$$

である。以下、この方程式系を介して、定理2の説明を試みることにする。

まず、次の形式級数が上の偏微分方程式系の形式解であることは簡単にたしかめられる。

(4.2) $$f(\gamma;x)=\sum_{k\in\ker A\cap\mathbf{Z}^n} x^{\gamma+k}/\Gamma(\gamma+k+1),$$

$$\Gamma(\gamma+k+1)=\prod_{i=1}^n\Gamma(\gamma_i+k_i+1)$$

ここで、γ は $A\gamma=\alpha$ をみたすベクトルなら何でもよい。この級数はこのままでは、正、負両方に無限個の項のある$\sum_{k=-\infty}^{\infty}t^k$ のような級数であり、一般には収束しない。収束させるために、γ をうまく選んで$\Gamma(\gamma+k+1)$ が k のうまい範囲で ∞ になるようにする。A の正則三角形分割は、この級数達を同時に収束させる条件として自然に登場する。T を A の正則三角形分割とする。σ を T にふくまれる最大次元の単体とする。$\sigma^*_1,\ldots,\sigma^*_{n-d}$ で σ の頂点のインデックスの補集合をあらわすことにする。$A\gamma=\alpha$ をみたすγ のうちで、$\gamma_{\sigma^*_1},\ldots,\gamma_{\sigma^*_{n-d}}\in\mathbf{Z}$ となるものの集合を G_σ と書くことにする。$G_\sigma/\ker A\cap\mathbf{Z}^n$ の代表元は、有限個であり、それを$\gamma(\sigma;1),\ldots,\gamma(\sigma,d_\sigma)$ と書くことにする。このとき、次の命題が成立する。

命題 4.1. ([GZK2]). ジェネリックなα に対して $\{\gamma(\sigma,1),\ldots,\gamma(\sigma,d_\sigma)\,|\,\sigma\in T\}$ できまる形式解 $f(\gamma(\sigma,i);x)$ 達は、共通の収束領域をもち (4.1) の1次独立な解の基底となる。さらに $t_\tau+C(A,T)\subset C(A,T)$ となる $t_\tau\in\mathbf{R}^n$ をうまくとると、

$$(-\log|x_1|,\ldots,-\log|x_n|)\in t_\tau+C(A,T)$$

をみたす x に対してすべての級数 $f(\gamma(\sigma,i);x)$, $\sigma\in T$ が収束する。

なお、この命題は基底となることを証明する部分を除いて比較的初等的に証明できる。

次に (4.1) の任意の解は $\mathbf{C}^n\setminus\{x\,|\,E_A(x)=0\}$ で正則であることをみよう。つまり、A-超幾何系の解は 主A 行列式 $=0$ できまる代数多様体上に特異点をもつのである。これを証明するには次の命題が必要である。この命題の証明は [GZK2] の主題であるので、証明についてはこの論文を参照していただきたい (なお、(2.4) を仮定して読む必要がある)。

命題 4.2. ([GZK2]). A-超幾何方程式系 (4.1) が定める D-加群の特性多様体は

(4.3)
$$\begin{cases}\boxed{\xi}_b=\prod_{b_i>0}(\xi_i)^{b_i}-\prod_{b_j<0}(\xi_j)^{-b_j} &= 0,\\ (b\in\ker A\cap\mathbf{Z}^n),&\\ \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\xi_i &= 0,\\ (i=1,\ldots,d-1)&\end{cases}$$

で定まる代数多様体である。

$\{\xi\in\mathbf{C}^n\,|\,\boxed{\xi}_b=0,\ b\in\ker A\cap\mathbf{Z}^n\}$ の射影化は2節でみたトーリック多様体 X_A に一致

していることをたしかめることができる。さて、D加群の一般論によれば (4.3) が$\xi \neq 0$ なる解をもつ x の集合全体を V とすると、V の外で (4.1) の解はすべて正則である。ここで、2節で定義した Chow 形式の定義をおもいだせば、V は主 A 行列式 E_A の 0 点集合にほかならないことがわかる。

このへんの議論はけっして初等的とはいえないが、最近開発されている、グレブナ基底を利用したD加群の不変量を計算するアルゴリズム、ソフトウエアなどを用いると、特性多様体を計算することができるので、特性多様体とは何かという感覚をつかむにはとてもよい ([Oa],[T])。

さて、命題 4.1、4.2 により、領域 $\{x \,|\, (-\log|x_1|, \ldots, -\log|x_n|) \in t_\tau + C(A,T)\}$ の上では $E_A \neq 0$ であることがわかる。したがって、領域$-t_\tau - C(A,T)$ は E_A が定めるアメーバの外側にあり、無限の遠方まで広がっている。さらに超幾何級数の収束領域のはじは、$E_A = 0$ にぶつかっているので、アメーバの足は、これらの間の領域に入り込んでいるはずである。この観察と定理 1 を組み合わせれば、定理 2 の直感的説明が終了することになる。一見、無関係な A-行列式、三角形分割、超幾何関数などが見事にむすびついている。

さて、最後に二つ蛇足をつけたすことにしよう。まず、ひとつめは本文中でたびたび出てきたグレブナ基底についてである。グレブナ基底とはある性質をみたすイデアルの生成元である。これを計算するためのアルゴリズムは Buchberger アルゴリズムとよばれ、数式処理の分野で盛んに研究されている。グレブナ基底の応用として環のさまざまな不変量が計算でき、数学の実験装置としておおいに役立っているし、また、本小文を理解していただくのにも役立つであろう。グレブナ基底については、参考文献 [CLO] や [E] が入門書としてすぐれている。さらに 3 節でのべた 2 次扇はグレブナ扇を介して、グレブナ基底の世界でも活躍している。

ふたつめは、2 次扇のさだめるトーリック多様体についてである。命題 4.1 を注意深くながめてみると、2 次扇（虹の扇）のさだめるトーリック多様体を超幾何関数の自然な定義域とみなしてみたくなる。そして、超幾何関数を周期写像とおもう。このように思うと、トーリック多様体の方は、代数的なモジュライ空間であり、超幾何関数は代数的なモジュライと解析的なモジュライをむすぶ関数である。無論、これは正確な数学ではないが、このような気分でいろいろな人達の仕事、たとえば [K][MSY] などをながめてみるとなかなか楽しいものがある。

参考文献

[AK] 青本和彦, 喜多通武、超幾何関数論、シュプリンガーフェアラーク東京,1994.

[CLO] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and algorithms*, Springer Verlag, 1993.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Springer Verlag, 1995.

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.

[GKZ] I.M. Gel'fand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, 1994.

[GZK2] I.M.Gel'fand, A.V.Zelevinskii and M.M.Kapranov, Hypergeometric functions and toral manifolds, *Funk. Anal.* **23**(1989), 12-26.

[K] M. Kapranov, Chow quotient of Grassmanians I, Advances of Soviet Mathematics **16** (1993), 29-110.

[MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, The monodormy of the period map of a 4-parameter family of $K3$ surfaces and the hypergeometric function of type $(3,6)$, International Journal of Mathematics, **3**, (1992) 1-164.

[Oa] 大阿久俊則、グレブナ基底と線形偏微分方程式系、上智大学数学講究録 38, 1994.

[Od] 小田忠雄、凸体と代数幾何学、紀伊国屋書店, 1985.

[T] N.Takayama, `http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/KAN/`

なお、スペースの制約もあり参考文献をあげていないが、以下のかたがたは関係分野にいろいろな寄与をされておられるし、またいろいろなことをご教示いただいた。この場をかりて感謝したい（無論、参考文献をあげたかたがたにはいろいろとお世話になった方がおおいので、この感謝はそちらのかたがたにも勿論しておきたい）：J. DeLoera, P. Pederson, B. Strumfels, 今井宏、木村弘信、斎藤睦、関口次郎、堀田良之、正田備也。

(たかやま·のぶき、神戸大学·理学部)