確率論 I　第1回講義ノート 2006.10.3

1 確率空間

1.1 確率空間

Ω : 全事象 —起こりうる事柄のすべて．数学的には一つの集合 ($\neq \emptyset$)

P : 確率．数学的には Ω の部分集合から区間 $[0,1]$ への写像.
ただし，**すべての Ω の部分集合に対して定義されているとは限らない**.

$\mathcal{D}(P)$: P の定義域．次の性質をもつものとする.

(i) 全事象の可測性　$\Omega \in \mathcal{D}(P)$

(ii) 余事象の可測性　$A \in \mathcal{D}(P)$ ならば $A^c \in \mathcal{D}(P)$
ただし，$A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$ は A が起こらないという事象．特に，$\emptyset = \Omega^c$ なので，$\emptyset \in \mathcal{D}(P)$ である.

(iii) σ-加法性　$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}(P)$ ならば，$\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{D}(P)$

上の3条件をみたす Ω の部分集合の族を Ω の σ-加法族と呼ぶ．σ-加法族は一般に $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ などの記号で表される．$\mathcal{F}$ を Ω の σ-加法族として，P が $\mathcal{F}$ 上で定義されている確率（測度）であるとは，P が次の3条件をみたすことを言う.

(i)　$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

(ii)　$P(\Omega) = 1$

(iii)　$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が互いに排反 (disjoint : つまり，$i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \emptyset$) ならば,

$$P\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

確率論では，全事象 Ω，σ-加法族 $\mathcal{F}$，およびそこで定義された確率 P の３つが指定される．このことを「確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられる」と言う．

例 1.1 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\omega) = \frac{1}{6}$, ただし ω は 1 から 6 までのどれか．このようにおくと，これはさいころを１回投げたときの結果についての問題を考えるときのモデルとなる確率空間． $\mathcal{F}$ は， Ω の部分集合の全体となる．また，$A \in \mathcal{F}$ のとき，

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

となる．例えば，$A = \{$ 偶数の目が出る $\} = \{2,4,6\}$ のときは,

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

例 1.2 さいころを２回ふった時の結果についてのモデルとなる確率空間は

$$\Omega = \big\{(\omega_1, \omega_2)\,;\, \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$$

$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合全体，$P\big((\omega_1, \omega_2)\big) = \dfrac{1}{36}$ となる．

σ-加法族について： 確率論や，ルベーグ積分論で最初に出くわす困難がこの σ-加法族である．抽象的に定義されるから直観が働きにくい上に無限個の集合に関する演算を扱うのでいったい何をしたらいいのかなかなか分かりにくいことになる．すこし例をあげながら解説をして行こう．

例 1.3 Ω を集合，$\mathcal{F}$ を Ω の σ-加法族とする．このとき，次のようなことが言える．

- $A, B \in \mathcal{F}$ ならば，$A \cup B, A \cap B \in \mathcal{F}$ である．

  1. $A \cup B \in \mathcal{F}$ について．
  $A_1, A_2, \ldots$ を次のように定めよう．

  $$A_1 = A, A_2 = B, A_3 = \emptyset, \ldots, A_n = \emptyset, \ldots$$

  仮定から $A_1(= A)$ と $A_2(= B)$ は $\mathcal{F}$ に属している．σ-加法族の性質 *(ii)* から，A_3 からあとはすべて空集合 $\emptyset$ なので，これ

らもすべて $\mathcal{F}$ に属する．
したがって，$\{A_n\}_{n\geq 1}$ は σ-加法族の条件 *(iii)* の前提を満たしているので，これより，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup B \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots = A \cup B$$

は $\mathcal{F}$ に属することになる．

2. $A \cap B \in \mathcal{F}$ を示すには，すこし工夫がいる．
最初に次の等式を証明してみよう．
「$A, B \subset \Omega$ のとき，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$」
実際，次のように推論してみる．

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ かつ } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

ゆえに，$(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ である．次に逆を考えてみよう．

$$x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \notin A \text{ かつ } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B$$

最後の式は $x \in (A \cup B)^c$ を意味している．

3. $A \cap B \in \mathcal{F}$ の証明．

$$A \cap B = (A^c)^c \cap (B^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$$

なので，上のことと σ-加法族の性質 *(ii)* より右辺は $\mathcal{F}$ の元．

- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば，$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
  $A \cap B \in \mathcal{F}$ の証明とほぼ同じであるが，$(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ という等式を証明しておけばよい．証明の仕方は $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ のときと同様である．

問題 1.1 Ω を勝手な（空でない）集合として，$\mathcal{F}$ を Ω の部分集合の全体とすると，$\mathcal{F}$ は Ω の σ-加法族であることを確かめよ．

問題 1.2 例 1.2 で，$A = \{$ 二つのさいころの目の和が 6 $\}$ に対して $P(A)$ を求めよ．

問題 1.3 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．このとき，上の (i)～(iii) の条件から空集合 $\emptyset$ に対して $P(\emptyset) = 0$ を証明せよ．