確率論　I　第１０回講義ノート 2006.12.15

4.2 大数の弱法則 (Weak Law of Large Numbers)

「そもそも，確率とは何か」という質問に対してなんと答えたらいいのであろうか？**確率** の直観的意味は，相対的な頻度であるといえるであろう．たとえば，さいころの目の出方は理想的にはどの目の出方も同等なはずであるが，現実的には少し偏りがあるとしても不思議ではない．この偏りはどのようにして調べたらよいかというと，何度も何度も繰り返して投げて実験を繰り返して，それぞれの目が n 回の試行のうち何%出たかを調べるのが普通である．つまり，われわれは**相対的な頻度はその目の出る確率に近づいていく**と考えている．これは経験則といっても良い．

これから述べていく大数の弱法則，後の節で述べる大数の強法則はこの経験則を数学的な枠組みの中で証明したもので，**実用に耐えうる**定理として有名な定理である．いつものように確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で表すことにする．

定義 4.4 $X_1, X_2, \ldots$ を確率変数の列とする．このとき，$\{X_n\}$ が確率変数 X に **確率収束する**とは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P\big[|X_n - X| > \varepsilon\big] = 0 \tag{22}$$

となるときに言う．

Theorem 4.2 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立で，分布がすべて同じ確率変数の列とする．今，$EX_1 = m, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ ならば，

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

とおくとき，$\dfrac{1}{n}S_n$ は期待値 m に確率収束する．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon\big) = 0$$

証明　チェビシェフの不等式から[5]

$$P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{E\left[|S_n - nm|^2\right]}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \tag{23}$$

$\{X_n\}$ が独立なので，問題 4.2 により，

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) = n\sigma^2$$

これを (23) に代入して，

$$P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) = P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$n \to \infty$ のとき，右辺は 0 に収束する．

Theorem 4.3 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ が独立ですべて同じ分布を持ち，可積分ならば，$EX_1 = m$ として，$\dfrac{S_n}{n}$ は m に確率収束する．

証明　$C > 0$ に対して X_n^C を

$$X_n^C(\omega) := \begin{cases} X_n(\omega), & |X_n(\omega)| \leq C \text{ のとき} \\ C, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する．X_n^C は有界なので，2 乗可積分で，その期待値と分散が存在．同分布なので，その値は n によらない．平均を m^C，分散を $(\sigma^C)^2$ と書く．$|X_1^C(\omega)| \leq |X_1(\omega)|$ で $C \to \infty$ のとき $X_1^C(\omega) \to X_1(\omega)$ なので，ルベーグの優収束定理により

$$\lim_{C\to\infty} m^C = \lim_{C\to\infty} E[X_1^C] = E[X_1] = m \text{ および } \lim_{C\to\infty} E[|X_1^C - X_1|] = 0$$

いま，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，C が十分大きいとき $|m - m^C| < \varepsilon$ となり，$S_n^C = X_1^C + \ldots + X_n^C$ と書くと，

$$|\frac{S_n}{n} - m| \leq |\frac{S_n}{n} - \frac{S_n^C}{n}| + |\frac{S_n^C}{n} - m^C| + |m - m^C|$$

[5] Theorem 3.2 で f として $f(x) = x^2 (x \geq 0 \text{ のとき}), = 0 (x < 0 \text{ のとき})$ とおき，確率変数 X として $X = |S_n - nm|$ をとる，このとき $f(X) = f(|S_n - nm|) = |S_n - nm|^2$ となる．

なので,

$$\begin{aligned} P\big(|\frac{S_n}{n} - m| > \varepsilon\big) &\leq P\big(|\frac{S_n - S_n^C}{n}| > \frac{\varepsilon - |m - m^C|}{2}\big) \\ &\quad + P\big(|\frac{S_n^C}{n} - m^C| > \frac{\varepsilon - |m - m^C|}{2}\big) \end{aligned}$$

右辺第 2 項は Theorem 4.2 から $n \to \infty$ のとき 0 に収束する. 一方, チェビシェフの不等式から[6]

$$\begin{aligned} \text{右辺第 1 項} &\leq \frac{2E|S_n - S_n^C|}{n(\varepsilon - |m - m^C|)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{2E|X_j - X_j^C|}{n(\varepsilon - |m - m^C|)} \\ &= \frac{2E|X_1 - X_1^C|}{\varepsilon - |m - m^C|} \end{aligned}$$

以上より,

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} P\big(|\frac{S_n}{n} - m| > \varepsilon\big) \leq \frac{2E|X_1 - X_1^C|}{\varepsilon - |m - m^C|} \tag{24}$$

(24) 左辺は C に無関係で $C \to \infty$ のとき (24) 右辺は 0 に収束する.

問題 4.3 大数の法則は同分布でなくても成り立つ. $\{X_n\}$ を独立で期待値が 0 の確率変数列とする. さらにある定数 $C >$ に対して

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 \leq C \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

とする.

(i) チェビシェフの不等式を使って

$$P\big(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\big) \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

を示せ.

(ii) このとき大数の弱法則が成立することを証明せよ.

[6]今度は Theorem 3.2 の f として $f(x) = \max\{0, x\}$ をとる. 確率変数 X としては $|S_n - S_n^C|$ をとる. このとき, $f(X) = f(|S_n - S_n^C|) = |S_n - S_n^C|$ である.