確率論　I　第１１回講義ノート 2006.12.22

Merry Christmas !

4.3　確率１でおこること

二つの確率変数 X, Y について $X(\omega) \neq Y(\omega)$ となる ω の集合の確率が 0 ならば, X と Y の確率的挙動は区別できない．このようなとき,「X と Y は確率 1 で等しい」という．式で表すと

$$P(X = Y) = 1 \quad \text{あるいは} \quad X = Y \text{ a.e.}$$

と書く． a.e は almost everywhere の略である．この a.e. はよく使う．例えば $P(X_n \to X) = 1$ となるとき，X_n は X に**概収束**するというが, Lebesgue の優収束定理は

$$|X_n| \leq Y \text{ a.e.},\ X_n \to X \text{ a.e.}, EY < \infty \text{ ならば} \quad \lim_{n\to\infty} EX_n = EX$$

とかくことができる．

例 4.1 $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1] = \{B \in \mathcal{B}; B \subset [0,1]\}$, $P = Lebesgue$測度とする．確率変数 X, Y を

$$X(\omega) = 1\ \forall\omega \in [0,1], \quad Y(\omega) = \begin{cases} 8 & if\ \omega = \frac{1}{2}, \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

このとき,

$$P(X \neq Y) = P(\{\frac{1}{2}\}) = 0$$

なので, $X = Y$ *a.e.* である．

例 4.2 さいころを無限回振り続けるとき，いつまで待っても 6 の目が出ないという**論理的可能性**はある．こんなことも論理的には可能である．しかし，実際問題としてこんなことは起こりそうもない．これは，このような出来事が起こる確率が 0 であるはずだと思わせる．

Theorem 4.4 (ボレル-カンテリ [Borel-Cantelli] の補題)

(i) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

を満たすならば，P-$a.e.$ の ω について，ある番号 $N(\omega)$ が存在して，$\omega \notin A_n \ \forall n > N(\omega)$.

(ii) 逆に，$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が独立で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

ならば，P-$a.e.$ の ω で，$\omega \in A_n$ となる n は無限に存在する

証明

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0 \tag{26}$$

を証明する．これが (i) を証明していることをまず確かめよう．$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とする．このとき，すべての n に対して $\omega \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ となる．したがってすべての n に対して $k \geq n$ がとれて $\omega \in A_k$ となる．これは $\omega \in A_k$ となる k が無限個あることを示す．また，$\omega \in A_k$ となる k が無限個あればすべての n に対してそれより大きい k で $\omega \in A_k$ となるものがあるので，$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ したがって，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega;\ 無限個の\ k\ に対して\ \omega \in A_k\}$$

(26) がいえたら，確率 1 で有限個の k についてのみ $\omega \in A_k$ となる．このときは $\omega \in A_k$ となる最後の番号がある．この番号を $N(\omega)$ と書けばいい．

(26) を証明しよう．条件から無限級数が収束するので $n \to \infty$ のとき，$\sum_{k \geq n} P(A_k) \to 0$．したがって $\bigcup_{k \geq n} A_k$ が n について単調に減少するので，確率の連続性から

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$$

(ii) を証明しよう今度は

$$P\Big(\Big\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\Big\}^c\Big) = 0 \tag{27}$$

を示す．

$$\Big\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\Big\}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k^c$$

なので，$\bigcap_{k \geq n} A_k^c$ が単調に n について増加するから，確率の連続性から

$$P\Big(\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k\Big\}^c\Big) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) \tag{28}$$

および，$\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c$ が m について減少するので確率の連続性から

$$P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) = \lim_{m \to \infty} P(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c) \tag{29}$$

$\{A_k\}$ が独立なとき，$\{A_k^c\}$ も独立なので，

$$P(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k))$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq 1 - x \leq e^{-x}$ が成り立つので，上の式にこれを代入すると

$$P(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k^c) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = \exp\{-\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)\} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

が仮定から得られる．(28, 29) からこれは (27) を意味する．

問題 4.4 さいころを振り続けることを考える．n 回目にでた目の数を X_n と書くと，$\{X_n\}$ は独立，同分布の確率変数列になる．ボレル-カンテリの第 2 補題 (Theorem 4.4, (ii)) により，確率 1 で無限個の n について $X_n = 6$ が起こることを確かめよ．したがってもちろん 6 の目はいつかは必ず（正確には確率 1 で）出るといっていい.（ヒント：$A_n = \{X_n = 6\}$ とおく.）

問題 4.5 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ が独立なとき，$\{A_n^c\}$ も独立なことを次のような手順でいうことにする．独立性の定義から，任意有限個の $A_{n_1}^c, \ldots, A_{n_p}^c$ に対して

$$P(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_p}^c) = \prod_{j=1}^{p} P(A_{n_j}^c) \tag{30}$$

が成り立つことを言えばよい．$p = 1$ のときは自明．一般の p に対して (30) を証明するために，もう少し一般に $0 \leq k \leq p$ に対して

$$P(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+1}} \cap \ldots \cap A_{n_p}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{n_j}^c) \prod_{i=k+1}^{p} P(A_{n_i}) \tag{31}$$

($k = 0$ のときは右辺は $\prod_{i=1}^{p} P(A_{n_i})$ と理解) を示す． $k = p$ のときが (30) である．$\{A_n\}$ の独立性から，任意の p に対して $k = 0$ のときは (31) が成り立っている．したがって $p = 1$ のときはこの式も自明に成り立っている．$p \leq N - 1$ のとき (31) が正しいと仮定して $p = N$ のときも正しいことを示そう．これをさらに k についての帰納法で (31) を示そう．(31) が k で正しいとして，

$$\begin{aligned}
& \left(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+1}} \cap \ldots \cap A_{n_N}\right) \\
& \quad \cup \left(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_{k+1}}^c \cap A_{n_{k+2}} \cap \ldots \cap A_{n_N}\right) \\
= \quad & A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+2}} \cap \ldots \cap A_{n_N}
\end{aligned}$$

であることを用いて (31) が $k + 1$ でも正しいことを証明せよ．