確率論 I 第１２回講義ノート

2004.12.17

4.4 大数の強法則

大数の弱法則の主張は**相対的な頻度は真の確率に近づいていく**という直観的な主張に比べると間接的であり，もどかしい感じがする．もっと直接にこの主張を数学的に証明することはできないかというのがこの節の目的である．

定義 4.5 平均 0 の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して**大数の強法則**が成り立つとは，

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad a.e.$$

が成り立つことを言う．X_n の平均が 0 でないときは $\tilde{X}_n = X_n - E(X_n)$ に対して大数の強法則が成り立つときに言う．特に，$EX_n = m$ （一定）のときはこれは

$$\frac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \quad a.e. \tag{32}$$

と同値である．

Theorem 4.5 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立，同分布な確率変数列で，

$$EX_1 = m,\ \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty,\ EX_1^4 < \infty$$

を満たすとすると，この $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して大数の強法則 (32) が成立する．

証明 まず，$E\{(X_n - m)^4\} \le K$ となる定数がある．これは $(a+b)^4 \le 8(a^4 + b^4)$ であるから，仮定から

$$E\{(X_n - m)^4\} \le 8\{EX_n^4 + m^4\} < \infty$$

となり，右辺の値を K とおくとよい．チェビシェフの不等式から[7]

$$P\Big(|\frac{S_n}{n}-m|\geq n^{-1/8}\Big)\leq \sqrt{n}E\{|\frac{S_n}{n}-m|^4\} \tag{33}$$

ここで，独立性から

$$\begin{aligned}
E\{|\frac{S_n}{n}-m|^4\} &= n^{-4}E\Big\{\big(\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)\big)^4\Big\}\\
&= n^{-4}\Big[\sum_{j=1}^{n}E\{|X_j-m|^4\}+6\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}(\sigma^2)^2\Big]\\
&\leq n^{-3}K+3n^{-3}(n-1)\sigma^4\\
&\leq (K+3\sigma^4)n^{-2}
\end{aligned}$$

これを (33) に代入して，

$$P\Big(|\frac{S_n}{n}-m|\geq n^{-1/8}\Big)\leq (K+3\sigma^4)n^{-3/2}$$

したがって n についてこの式の和を取ると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}P\Big(|\frac{S_n}{n}-m|\geq n^{-1/8}\Big) &\leq (K+3\sigma^4)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}\\
&\leq (K+3\sigma^4)\Big[1+\int_1^{\infty}x^{-3/2}dx\Big]<\infty
\end{aligned}$$

が分かる．ボレル-カンテリの第 1 補題 (Theorem 4.4(i)) から，確率 1 である番号 N が存在して $n\geq N$ のとき，

$$|\frac{S_n}{n}-m|<n^{-1/8}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．よって大数の強法則が成り立っている．

Theorem 4.5 は，一番簡単な形の証明を持つ強大数の法則である．これよりももっと緩やかな条件で強大数の法則は成り立つことが知られている．定理の形で述べておこう．証明は西尾真喜子「確率論」参照のこと．

[7] $f(x)=x^4$ $(x\geq 0)$; $=0$ $(x\leq 0)$ に対して $X=|\frac{S_n}{n}-m|$ とおく．このとき，やはり，$f(X)=|\frac{S_n}{n}-m|^4$

Theorem 4.6 (i) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立な確率変数で，平均 0, 分散 $\sigma_n^2 < \infty$ とし，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \tag{34}$$

となるならば，$\{X_n\}$ に対して強大数の法則が成立する．

(ii) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で同分布を持ち，可積分， $EX_1 = m$ とすると $\{X_n\}$ に対して大数の強法則 (33) が成立する．

注意 4.1 (i) の証明にはコルモゴロフ [Kolmogorov] の不等式と呼ばれる有名な不等式と次の事実（クロネッカー [Kronecker] の補題の特別な場合）を使う．非負の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \quad \text{ならば} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to 0$$

(ii) の証明には (i) の結果を $Y_n = X_n \cdot 1_{[|X_n| \leq n]}$ に対して使っておき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \leq n) \leq Const. \times E|X_1| < \infty$$

から，ボレル-カンテリの第 1 補題を用いて X_n に対しても強大数の法則が成り立つことを示す．

問題 4.6 Theorem 4.5 は別の証明法がある．以下の手順でこれを証明してみよ．

(i) Z が可積分な確率変数ならば，確率 1 で $|Z| < \infty$ となることを証明せよ．（逆は正しくないことに注意！）

(ii) Theorem 4.5 の条件の下で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\Big(\frac{(S_n - nm)^4}{n^4}\Big) < \infty$$

を示し，これから

$$\frac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \quad \text{a.e.}$$

を示せ．