確率論　I　第１４回講義ノート 2007.1.26

5.2　特性関数

解析学のさまざまな場面で，フーリエ変換が有効な場合がある．分布を扱う場合はそのフーリエ変換である特性関数を使うと簡単になることがあり，中心極限定理もその一つである．まず特性関数の定義からはじめよう．

定義 5.2 (i)　分布 μ の **特性関数** $\phi(u),\ u \in \mathbf{R}$ を

$$\phi(u) = \phi_\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\mu(dt) \tag{38}$$

で定義する．

(ii)　確率変数 X の**特性関数** $\phi_X(u)$ を

$$\phi_X(u) = E\left[e^{iXu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\mu_X(dt) \tag{39}$$

で定義する．ただし，μ_X は X の分布である．

分布と特性関数は 1 対 1 に対応している．このことを主張するのが次の Lévy の反転公式である．

Theorem 5.2 (Lévy の反転公式) μ を分布，F, ϕ をそれぞれ μ の分布関数，特性関数とする．$a < b$ が F の連続点のとき，

$$\mu([a,b]) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_a^b \int_{-A}^{A} \phi(u)e^{-itu}dudt \tag{40}$$

証明　Fubini の定理により，

$$
\begin{aligned}
\int_{-A}^{A}\phi(u)e^{-itu}du &= \int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s-t)u}\mu(ds)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-A}^{A}e^{i(s-t)u}du\mu(ds) \\
&= \mu(\{t\})+\int_{\mathbf{R}\setminus\{t\}}\frac{2\sin\{(s-t)A\}}{(s-t)}\mu(ds)
\end{aligned}
$$

これを a から b まで dt で積分すると，$\mu(\{t\})>0$ となる t は高々可算個なので，右辺第一項の積分は 0. ふたたび Fubini の定理により

$$
\begin{aligned}
\int_a^b\int_{-A}^{A}\phi(u)e^{-itu}dudt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\frac{2\sin\{(s-t)A\}}{(s-t)}dt\mu(ds) \\
&= \int_{-\infty}^{a}\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds) \\
&\quad +\int_a^b\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds) \\
&\quad +\int_b^{\infty}\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds)
\end{aligned}
$$

$s<a$ のとき，$(s-b)A,(s-a)A<0$ なので，$A\to\infty$ のとき，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to 0$$

同様に，$s=a$ のとき，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to\int_{-\infty}^{0}\frac{2\sin v}{v}=\pi$$

$a<s<b$ のときは $s-b<0<s-a$ なので，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin v}{v}dv=2\pi$$

$s=b$ ならば

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to\int_{0}^{\infty}\frac{2\sin v}{v}dv=\pi$$

最後に，$s > b$ ならば $s-a, s-b > 0$ なので，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \to 0$$

有界収束定理により，a, b が F の連続点であることから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \mu(ds) \to \int_a^b 2\pi\mu(ds) = 2\pi\mu([a,b])$$

例 5.3 離散的な分布の特性関数をいくつか求めてみよう.

ディラック分布 δ_0 の特性関数 $\phi_{\delta_0}(u)$ は

$$\phi_{\delta_0}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\delta_0(du) = 1$$

二項分布 $B(n,p)$ の特性関数 $\phi(u)$ は，

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{iku} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{iu})^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left(1 - p + pe^{iu}\right)^n \\
&= \left(1 + p(e^{iu} - 1)\right)^n
\end{aligned}$$

ポアソン分布 $P(\lambda)$ の特性関数 $\phi(u)$ は

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{iku} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{\lambda(e^{iu}-1)}
\end{aligned}$$

次に正規分布の特性関数を求めてみる

標準正規分布 $N(0,1)$ の特性関数 $\phi_{N(0,1)}(u)$ は

$$\begin{aligned}
\phi_{N(0,1)}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itu} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-iu)^2}{2} - \frac{u^2}{2}} dt \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

一般の正規分布 $N(m,\sigma^2)$ の特性関数 $\phi_{N(m,\sigma^2)}(u)$ は

$$\begin{aligned}\phi_{N(m,\sigma^2)}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(m+\sigma z)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= e^{ium}\phi_{N(0,1)}(u\sigma) \\ &= e^{imu}e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\end{aligned}$$

さらに，分布の収束と特性関数の収束が対応している．

Theorem 5.3 分布の収束は特性関数の各点収束と同値である．

証明 e^{itu} は u の連続関数で絶対値は 1 以下なので，分布の収束は対応する特性関数の収束を意味する．逆は Glivenko の定理と呼ばれているが，少し補題の形で準備をしておいたほうがいい．

Lemma 5.4 分布の収束 $\mu_n \to \mu$ は次の条件と同値である．

条件 (UC) 任意の有界かつ一様連続な関数 g に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu_n(dt) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu(dt)$$

証明 $\mu_n \to \mu$ のときは Theorem 5.1 から条件 (UC) は成り立っている．逆に条件 (UC) が成り立っているとする．このとき，F を μ の分布関数として，t をその連続点とする．F_n を μ_n の分布関数として $F_n(t) \to F(t)$ を示せばよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g_\varepsilon^+, g_\varepsilon^-$ を連続で

$$g_\varepsilon^+(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \le t \\ 0 & \text{if } s \ge t+\varepsilon \\ \text{linear} & \text{if } t < s < t+\varepsilon \end{cases}$$

および,

$$g_\varepsilon^-(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \le t-\varepsilon \\ 0 & \text{if } s \ge t \\ \text{linear} & \text{if } t-\varepsilon < s < t \end{cases}$$

と定めると，これらは一様連続でもあるので，条件 (UC) からこれらを μ_n で積分したものは μ による積分値に収束する．

$$g_\varepsilon^-(s) \nearrow 1_{(-\infty,t)}(s), \quad g_\varepsilon^+(s) \searrow 1_{(-\infty,t]}(s)$$

が任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して成り立つので，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon^-(s)\mu(ds) &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon^-(s)\mu_n(ds) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} F_n(t) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} F_n(t) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon^+(s)\mu_n(dt) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon^+(s)\mu(dt)
\end{aligned}$$

$\varepsilon \searrow 0$ とすると上の式の右辺と左辺は， t が F の連続点だからともに $F(t) = \mu((-\infty, t])$ に収束する．

Lemma 5.5 分布の収束 $\mu_n \to \mu$ はさらに次の条件とも同値

条件 (CS)　任意のコンパクトな台をもつ連続関数 g に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu_n(dt) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu(dt)$$

が成立.

証明　F_n, F を μ_n, μ の分布関数とする．$t_1 < t_2$ を F の連続点として，コンパクトな台を持つ連続関数 $g_\varepsilon^+, g_\varepsilon^-$ を

$$0 \leq g_\varepsilon^-(s) \leq 1_{[t_1,t_2]}(s) \leq g_\varepsilon^+(s)$$

かつ，$g_\varepsilon^-(s) \nearrow 1_{(t_1,t_2)}(s), g_\varepsilon^+(s) \searrow 1_{[t_1,t_2]}(s) \quad \forall s \in \mathbf{R}^1$ となるようにとると，条件 (CS) をつかって Lemma 5.4 と同じように議論すると，

$$\mu_n((t_1, t_2]) \to \mu((t_1, t_2]) \quad as\ n \to \infty \tag{41}$$

が示せる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して F の連続点 t_1, t_2 を t_1 を十分小さく取り，t_2 を十分大きく取ることにより，$\mu((t_1, t_2]) > 1 - \varepsilon$ とでき，(41) よ

り n が十分大きければ $\mu_n((t_1,t_2]) > 1-2\varepsilon$ とできる．このとき $s < t_1$ ならば

$$F_n(s) = \mu_n((-\infty,s]) \leq \mu_n((-\infty,t_1)) \leq 1-\mu_n([t_1,t_2]) < 2\varepsilon$$

いま，t を F の連続点とするとき，$s < \min\{t,t_1\}$ ならば,

$$\begin{aligned}|F_n(t)-F(t)| &\leq |F_n(t)-F_n(s)-(F(t)-F(s))|+F_n(s)+F(s)\\ &\leq |\mu_n((s,t])-\mu((s,t])|+3\varepsilon\end{aligned}$$

$n\to\infty, \varepsilon \searrow 0$ とすると，$|F_n(t)-F(t)| \to 0$ となり，これは $\mu_n \to \mu$ を意味している．

Theorem 5.3 の証明 $\phi(u), \phi_n(u)$ をそれぞれ μ, μ_n の特性関数とする．最初に，$G(u)$ を $\mathbf{R}^1$ 上のルベーグ可積分な関数とするとき，ルベーグの収束定理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\phi_n(u)du \to \int_{-\infty}^{\infty} G(u)\phi(u)du \tag{42}$$

g をコンパクトな台を持つ連続な関数とするとき，可積分な関数 g_k を

$$g_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}G_k(u)du$$

が $g(t)$ に t について一様に収束する様に取れる．この G_k は

$$G_k(u) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2k}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-isu}ds$$

と取ると良い．さしあたりこの事実を認めて先へ進もう．

$$\begin{aligned}&|\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu_n(dt) - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mu(dt)|\\ \leq\ & \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)-g_k(t)|\mu_n(dt) + \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)-g_k(t)|\mu(dt)\\ &+|\int_{-\infty}^{\infty} g_k(t)\mu_n(dt) - \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t)\mu(dt)|\end{aligned}$$

で右辺第１項と第２項は g_k が g に一様収束するからいくらでも小さくできる．第３項の計算のために，次の式変形をしておく．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_k(t)\mu_n(dt) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}G_k(u)du\mu_n(dt)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_k(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\mu_n(dt)du\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_k(u)\phi_n(u)du\end{aligned}$$

(42) により第3項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．

最後に，g_k が g に一様収束することを示しておこう．Fubini の定理により

$$
\begin{aligned}
g_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu-\frac{u^2}{2k}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-isu}dsdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)u-\frac{u^2}{2k}}duds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\sqrt{\frac{k}{2\pi}}e^{-\frac{k(t-s)^2}{2}}ds
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
|g_k(t)-g(t)| &\leq \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k(t-s)^2}{2}}|g(s)-g(t)|ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}2|g(t-\frac{z}{\sqrt{k}})-g(t)|dz
\end{aligned}
$$

g は有界なので，任意の $\varepsilon>0$ に対して M が十分大きければ

$$
\int_{|z|\geq M} 2\|g\|e^{-\frac{z^2}{2}}dz<\varepsilon
$$

とできる．一方，g の一様連続性から $|t-t'|<\delta$ ならば

$$
|g(t)-g(t')|<\varepsilon
$$

とできる．したがって，$|Z|\leq M$ のとき $k>\frac{M^2}{\delta^2}$ ならば

$$
|g(t)-g(t-\frac{z}{\sqrt{k}})|<\varepsilon
$$

この評価は t について一様である．以上をあわせると，g_k が g に一様収束することが分かる．

特性関数を使うと簡単に分かることがいくつかある．

例 5.4 X がポアソン分布 $P(\lambda)$ に従い，Y がポアソン分布 $P(\xi)$ に従い，X と Y は独立とすると，$X+Y$ はポアソン分布 $P(\lambda+\xi)$ に従う．実際，X と Y が独立なので，

$$
\begin{aligned}
\phi_{X+Y}(u)=E[e^{iu(X+Y)}] &= E[e^{iuX}]E[e^{iuY}] \\
&= e^{\lambda(e^{iu}-1)}e^{\xi(e^{iu}-1)} \\
&= e^{(\lambda+\xi)(e^{iu}-1)}
\end{aligned}
$$

問題 5.3 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従い，Y が正規分布 $N(a,v^2)$ に従い，X と Y が独立ならば，$X+Y$ の分布は正規分布 $N(m+a,\sigma^2+v^2)$ となることを確かめよ.

問題 5.4 ポアソンの少数の法則を特性関数を用いて証明せよ。つまり、$np_n \to \lambda > 0$ のとき、$B(n,p_n) \to P(\lambda)$ が分布の収束の意味で成り立つことを証明せよ.