確率論　I　第２回講義ノート　2006.10.20 訂正版

今日の内容は手ごわいです。じっくりと考えてください。

1.2　生成された σ-加法族

例 1.4 $\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$ を Ω の σ-加法族とする．このとき，

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{A \subset \Omega;\ A \in \mathcal{F} \text{ かつ } A \in \mathcal{G}\}$$

もまた Ω の σ-加法族になる．これを確かめてみる．

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ が Ω の σ-加法族の条件 (i) 〜 (iii) を満たすことを確かめればよい．

(i)　$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ がそれぞれ Ω の σ-加法族なので，条件 (i) から，$\Omega \in \mathcal{F}$ かつ $\Omega \in \mathcal{G}$ したがって $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(ii)　$A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ならば，$A \in \mathcal{F}$ かつ $A \in \mathcal{G}$．したがって，条件 (ii) より，
$A^c \in \mathcal{F}$ かつ $A^c \in \mathcal{G}$．すなわち $A^c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

(iii)　$A_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}, n = 1, 2, \ldots$ のとき，すべての n に対して $A_n \in \mathcal{F}$ かつ $A_n \in \mathcal{G}$ なので，σ-加法族の条件 (iii) より，
$\displaystyle\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$ よって，$\displaystyle\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

例 1.5 $\mathbf{F}$ を Ω の σ-加法族の任意個数の集まりとする.（非可算無限個でもよい）このとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{F}} &:= \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathbf{F}} \mathcal{F} \\ &= \{A \subset \Omega;\ \text{すべての } \mathcal{F} \in \mathbf{F} \text{ に対して } A \in \mathcal{F} \text{ となる }\} \end{aligned}$$

とおくと，$\mathcal{F}_{\mathbf{F}}$ もまた Ω の σ-加法族となる．

実際，例 1.4 と同じように σ-加法族の条件 (i) 〜 (iii) をチェックすればよい．

定義 1.1 $\mathcal{C}$ を Ω の部分集合のある族とする．このとき，

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap\{\mathcal{G};\, \mathcal{G} \supset \mathcal{C},\ \text{かつ}\, \mathcal{G}\ \text{は}\ \Omega\ \text{の}\ \sigma\text{-加法族}\}$$

は $\mathcal{C}$ で生成された σ-加法族と呼ばれる．

注意 1.1 定義 1.1 の $\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ を含む最小の Ω の σ-加法族である．
実際，例 1.5 により，$\sigma(\mathcal{C})$ は Ω の σ-加法族となり，また，$\mathcal{G}$ が $\mathcal{C}$ を含む勝手な Ω の σ-加法族とするとき，つくり方から $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$ は明らか．
また，$\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ が、このようなすべての $\mathcal{G}$ に対していえるので，$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

例 1.6 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間．$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ が $\mathcal{F}$ の元による Ω の分割であるとする．つまり，

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m)$$

このとき，$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ として，

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{\bigcup_{n \in J} A_n; J \subset \mathbf{N}\} \tag{1}$$

である．
実際，まず右辺の要素をひとつとってくると，$\cup_{n\in J} A_n$ で，それぞれの A_n は $\mathcal{P}$ の要素だから， $\sigma(\mathcal{P})$ の要素でもある．$J \subset \mathbf{N}$ は可算集合だから，σ-加法族の性質 (iii) により，$\cup_{n\in J} A_n \in \sigma(\mathcal{P})$. したがって 右辺 $\subset$ 左辺.
逆を示すには，右辺が $\mathcal{P}$ を含む σ-加法族である事をいう．そうすると注意 1.1 で示した最小性により，左辺 $\subset$ 右辺.
以下，σ-加法族の条件 (i) $\sim$ (iii) を右辺について確かめる．
(i) $\Omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ なので，これは右辺の要素.
(ii) $B \in$ 右辺 とすると，ある $J \subset \mathbf{N}$ に対して $B = \cup_{n\in J} A_n$ とかける．$\mathcal{P}$ が分割であることから， $B^c = \cup_{n\in\mathbf{N}\setminus J} A_n$ である．したがって，これもまた右辺の要素.
(iii) $B_k \in$ 右辺$, k \geq 1$ とする．$J_k \subset \mathbf{N}$ を $B_k = \cup_{n\in J_k} A_n$ となるように取れる．このとき， $\cup_{k\geq 1} B_k = \cup_k \cup_{n\in J_k} A_n$ に現れる A_n の n は，どれかの J_k に属しているので，$\cup_k J_k$ の要素．よって， $\cup_k B_k = \cup_{n\in\cup_k J_k} A_n$ とかけ，これは右辺の要素.

問題 1.4 $\Omega = \mathbf{R}$ のとき,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{(-\infty, a]; a \in \mathbf{R}\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \{(a, b]; a, b \text{ は実数 }\}, \\
\mathcal{C}_3 &= \{I; \mathbf{R} \text{ の区間 }\}, \\
\mathcal{C}_4 &= \{G; \mathbf{R} \text{ の開集合 }\}
\end{aligned}$$

のとき, $\sigma(\mathcal{C}_i)$ はすべて同じ σ-加法族になる. この σ-加法族を**一次元ボレル** σ-**加法族** と呼ぶ. $\sigma(\mathcal{C}_i)$ が同じ σ-加法族であることを次の順序で証明せよ.

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ならば, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$ であることを証明せよ.
   (ヒント：まず右辺が $\mathcal{C}$ を含む σ-加法族であることをいう.)

2. $\mathcal{F}$ が $\mathbf{R}$ の σ-加法族のとき, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ ならば, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ を示せ.

3. 上のことから $\sigma(\mathcal{C}_1), \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$ であることを示せ. また, 任意の $\mathbf{R}$ の開集合は 開区間の可算個の和で表されることを用いて $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_4) \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$ を示せ.

4. 最後に任意の区間は $\sigma(\mathcal{C}_1)$ に入ることを示せ.
   (ヒント：$[a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c$, $(a, b) = \cup_{n \geq 1}[a + \frac{1}{n}, b)$)
   また, これより, 4つの σ-加法族 $\sigma(\mathcal{C}_1), \sigma(\mathcal{C}_2), \sigma(\mathcal{C}_3), \sigma(\mathcal{C}_4)$ が一致することを証明せよ.