確率論　I　第３回講義ノート 2006.10.20 訂正

1.3　確率の基本的性質

定義 1.2 Ω : 集合（全事象）　$\mathcal{F}$: Ω の σ-加法族の二つが与えられているとき，$\mathcal{F}$ で定義された（集合）関数 P が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率（測度）であるとは，以下の (i) 〜 (iii) の条件が満たされるときに言う．

(i) $0 \le P(A) \le 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が互いに排反 $(n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset)$ のとき，

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

最後の条件 (iii) は**確率 P の σ-加法性** と呼ばれる．(σ-加法族の σ-加法性とは違う.）この性質が，極限演算に関する確率の性質を保証する．

Theorem 1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

(ii) $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

証明 (i) $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が、条件を満たす減少列とする．このとき，

$$B_n := A_n \setminus A_{n+1}$$

とおくと， $\{B_n\}$ は排反である．
実際，$n > m$ のとき， $B_m = A_m \setminus A_{m+1} \subset A^c_{m+1}$ で，$B_n = A_n \setminus A_{n+1} \subset A_n \subset A_{m+1}$ なので，$B_m \cap B_n = \emptyset$.
次に，任意の $n \geq 1$ について

$$A_n = B_\infty \cup (\cup_{k\geq n} B_k)$$

である．ただし，$B_\infty = \cap_{m\geq 1} A_m$ である．
実際， $k \geq n$ のとき $B_k \subset A_k \subset A_n$ だから $A_n \supset \cup_{k\geq n} B_k$ である．$B_\infty \subset A_n$ も明らか．ゆえに， $A_n \supset B_\infty \cup (\cup_{k\geq n} B_k)$ である．逆に，$\omega \in A_n$ が $B_\infty = \cap_{m\geq 1} A_m$ の点でないとすると，少なくともひとつの m に対して $\omega \notin A_m$ となる．M をこのような一番小さい番号とすると，$M > n$ であり，$\omega \in A_{M-1}$ かつ $\omega \notin A_M$ つまり， $\omega \in B_{M-1} \subset \cup_{k\geq n} B_k$.
したがって， $A_n \subset B_\infty \cup (\cup_{k\geq n} B_k)$ もいえる．
最後に，$B_\infty \cap B_k = \emptyset$ であることから， P の σ-加法性により，

$$1 \geq P(A_n) = P(B_\infty) + \sum_{k\geq n} P(B_k) \tag{2}$$

特に，右辺の無限和は収束する．したがって， $n \to \infty$ のとき，
$\sum_{k>n} P(B_k) \to 0$. (3) より， $n \to \infty$ として，(i) の主張を得る．

(ii)

$$B_1 := A_1, B_k := A_k \setminus A_{k-1} \ (k \geq 2)$$

とおくと，$\{B_k\}$ は排反で，

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \tag{3}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \tag{4}$$

が成り立つことを示す.
実際，$k > \ell$ のとき， $B_k \subset A^c_{k-1}, B_\ell \subset A_\ell \subset A_{k-1}$ なので， $B_k \cap B_\ell = \emptyset$.
作り方から， $A_n = B_n \cup A_{n-1}$ に注意すると，これを繰り返すことによ

り，(4) が分かる．また，任意の $n \geq 1$ について $B_n \subset A_n$ なのだから，n について和集合を取って，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

一方，$\omega \in \cup_{n\geq 1} A_n$ とするとき，$\omega \in A_k$ となる一番小さい k をとってくると， $\omega \in A_k$ かつ $\omega \notin A_{k-1}$ つまり $\omega \in A_k \setminus A_{k-1} = B_k$ である．よって，$\omega \in \cup_{k\geq 1} B_k$ で，ω は $\cup_{n\geq 1} A_n$ から勝手に取ってきたのだから，これは

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

を意味する．上のことと合わせると (5) が証明できた．$\{B_k\}$ が排反なことから，(5) と P の σ-加法性から

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

系 1.2 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 確率空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ のとき，

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

証明 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) \leq P(A_1) + P(A_2)$ これを繰り返して，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{5}$$

左辺の集合はだんだん大きくなって $\cup_{n\geq 1} A_n$ に近づく．よって，Theorem 1.1, (ii) によって左辺は

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

に収束.

問題 1.5 上では当たり前のように使ったが，確率の性質 (i) $\sim$ (iii) から次を証明してみよう（有限加法性は使ってもよい）．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とする.

$$A, B \in \mathcal{F},\ A \supset B \Rightarrow P(A) \geq P(B)$$

問題 1.6 数学的帰納法により、(6) を証明してみよう.