確率論　I　第４回講義ノート 2006.10.27

2　確率変数，分布

2.1　確率変数とその分布

定義 2.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:　確率空間
確率変数とは，Ω 上で定義された実数値の関数 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ で，$\mathcal{F}$-可測なものをいう．つまり，任意の実数 a に対して

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F} \tag{6}$$

をみたすもののことである．

条件 (6) は，次の条件と同値である．
　任意のボレル集合[1] A に対して

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \tag{7}$$

実際，$(-\infty, a]$ は問題 1.4 よりボレル集合だから X が条件 (7) をみたせば X は確率変数である．逆を言うためには，次のような集合族を考える．

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{B};\ X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

ただし，$\mathcal{B}$ は一次元ボレル σ-加法族を表す．$\mathcal{M}$ は $\mathbf{R}$ の σ-加法族である．実際，$X^{-1}(\mathbf{R}) = \Omega \in \mathcal{F}$ なので，$\mathbf{R} \in \mathcal{M}$．次に，$A \in \mathcal{M}$ とすると

$$X^{-1}(A^c) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \notin A\} = X^{-1}(A)^c \in \mathcal{F}$$

だから，$A^c \in \mathcal{M}$. 最後に $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ のとき，

$$X^{-1}(\cup_{n\ge1} A_n) = \{\omega \in \Omega; \exists n,\ X(\omega) \in A_n\} = \cup_{n\ge1} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$$

[1] 1 次元ボレル σ-加法族 $\mathcal{B}$ の要素を 1 次元ボレル集合と呼ぶ．

したがって $\mathcal{M}$ は σ-加法族で，問題 1.4 の $\mathcal{C}_1$ を含む．したがってふたたび問題 1.4 により，$\mathcal{M} \supset \mathcal{B}$ となる．

確率変数の線形結合はまた確率変数になる．また，確率変数が各点 $\omega \in \Omega$ で収束するとき極限もまた確率変数になる．ふたつの確率変数 X, Y に対して $X \vee Y(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$, $X \wedge Y(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$ もまた確率変数になる.（これらの事実はルベーグ積分のときと同じように証明できるが，時間がかかるのでここでは省略する.）

定義 2.2 X を確率変数とするとき，次で定義される $\mathcal{B}$ 上の集合関数 μ_X を X の**分布**と言う．$A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\mu_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\})$$

上の μ_X は $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度である．
実際，$\mu_X(A) = P(X \in A) \in [0,1], \mu_X(\mathbf{R}) = P(X \in \mathbf{R}) = 1$ は明らか．$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ が排反の時，$i \neq j$ ならば，$X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset$ であるから（$\omega \in X^{-1}(A_i) \Rightarrow X(\omega) \in A_i$ このとき $A_i \cap A_j = \emptyset$ だから $X(\omega) \in A_j$ は不可能）

$$\mu_X(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = P(\bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A_n)) = \sum_{n \geq 1} P(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n \geq 1} \mu_X(A_n)$$

となり，μ_X は $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度.

問題 2.1 一般に $X : \Omega \to \mathbf{R}$ のとき，$A_1, A_2, \ldots \subset \mathbf{R}$ なら

(i) $X^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A_n)$

(ii) $X^{-1}(A_1^c) = \Omega \setminus X^{-1}(A_1)$

を証明せよ.

問題 2.2 くじつきのガムがある．あたる確率は p であるという．買い続けてはじめてあたりを引くまでのガムを買う回数を X とするとき，X の分布を求めよ.

問題 2.3 上の問題 2.2 で，n 回ガムを買った時のあたりの回数 Y の分布を求めよ.