確率論　I　第５回講義ノート 2006.11.10

2.2　分布の例

この小節ではいくつかの分布の例を見る．最初の３つは離散分布の例であり，あとの２つは連続分布の例である．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は固定しておく．

離散分布 確率変数 X が整数などのような離散的な値しかとらないとき，（たとえばさいころをふったときの出る目の数）X の分布 μ_X はどのように表したらよいのであろうか？分布の定義からだとかえって難しそうに見える．整数に値をとる場合を例にとり考えてみる．それぞれの整数 k には，$X = k$ となる確率 $P(X = k) = p_k$ が与えられている．X が整数にしか値をとらないということは，

$$P(X \in \mathbf{Z}) = P(\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{X = k\}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} P(X = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$$

ということである．ここで，$k \neq \ell$ のとき，二つの事象 $\{X = k\}, \{X = \ell\}$ は排反であることに注意すると２番目の等式が成り立つ．ゆえに μ_X は次のようになる．$A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = P(X \in A \cap \mathbf{Z}) = \sum_{k \in A \cap \mathbf{Z}} p_k$$

したがって，離散的な値をとる確率変数に対しては，それぞれの値をとる確率を決めれば分布が決まることになる．

例 2.1　二項分布 $B(N, p)$
確率変数 X は，0 から N までの整数値のみを値として取り，$0 < p < 1$ に対して

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

となっている．

例 2.2　ポアソン分布 $P(\lambda)$[1]
$\lambda > 0$ に対して，確率変数 X は，0 以上の整数値を取り，

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \ldots$$

となっている．

例 2.3　幾何分布
確率変数 X は 0 以上の整数に値を取り，$0 < p < 1$ のとき

$$P(X = k) = (1 - p)p^k \quad k = 0, 1, \ldots$$

となっている．

連続分布 確率変数 X が、区間 $[a, b]$, 半開区間 (a, ∞)，実数全体 $\mathbf{R}$ などに値を取るとき，分布 μ_X は

$$\mu_X(A) = P(X \in A)$$

として定義すればよいから，こちらのほうが定義は簡単である．

例 2.4　正規分布 $N(m, v^2)$ [2]
確率変数 X は実数に値を取り，$m \in \mathbf{R}, v > 0$ のとき

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\int_A e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}}dx \quad A \in \mathcal{B}$$

特に，$m = 0, v = 1$ のとき，分布 μ_X を **標準正規分布**という．

注意 2.1 X の分布が標準正規分布 $N(0, 1)$ のとき，$a \neq 0, b \in \mathbf{R}$ に対して $Y = aX + b$ の分布は $N(b, a^2)$ となる．

---

[1]統計で良く出て来る分布の一つ．ポーランドの統計学者ボルトキービッツが示した例は有名．1875 年–1894 年の 20 年間にプロシャの 10 軍団で**馬に蹴られて死んだ兵士の数**の 1 年 1 軍団当たりの分布が $\lambda = 0.61$ のポアソン分布でよく近似できている．— 篠崎信雄「統計解析入門」サイエンス社 を参照．また，W.Feller 著 An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc にもこの分布の応用の色々な例が書いてあり面白い．

[2]統計学におけるほとんどの理論はこの分布を基礎としている．別名をガウス (Gauss) 分布という．誤差の集積がこの分布に従うというガウスの発見にちなんだものと思われる．

実際，$a > 0$ として $\alpha < \beta$ のとき，

$$\begin{aligned}\mu_Y([\alpha,\beta]) &= P(\alpha \le aX + b \le \beta)\\ &= P(\frac{\alpha - b}{a} \le X \le \frac{\beta - b}{a})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-b}{a}}^{\frac{\beta-b}{a}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

ここで $y = ax + b$ と変数変換すると右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}dy$$

となる．

例 2.5　指数分布 $\exp(\lambda)$
確率変数 X は 0 以上の実数に値を取り，$\lambda > 0$ のとき

$$P(X \in A) = \lambda\int_{A\cap[0,\infty)} e^{-\lambda x}dx \quad A \in \mathcal{B},$$

となる．

注意 2.2 X をパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布とする．$a, b > 0$ のとき，

$$P(X > a + b) = e^{-\lambda(a+b)} = P(X > a)P(X > b)$$

X は a を越えた後，さらに残った量 b をこえなければならないが，上の式はこの二つが独立に起こることを示している．条件付確率で書くと，

$$\begin{aligned}P(X > a + b \mid X > a) &= \frac{P(X > a + b, X > a)}{P(X > a)}\\ &= \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = P(X > b)\end{aligned}$$

という式で表され，指数分布の確率変数の**忘れっぽさ** *(memoryless property : lack of memory)* とよばれる式である．

問題 2.4 例 2.1, 2.2, 2.3 で，すべての k について $P(X = k)$ の和を取ると 1 になることを確かめよ．ただし，$k > N$ のとき $\binom{N}{k} = 0$ とする．

問題 2.5 例 2.4 において，$\mu_X(\mathbf{R}) = 1$ を確かめよ．また，例 2.5 で，$\mu_X([0,\infty)) = 1$ を確かめよ．