確率論 I 第7回講義ノート 2006.11.24

3 期待値，分散，モーメント

3.1 期待値

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は与えられているものとする．確率変数の**期待値**あるいは**平均値**と呼ばれる量を定義しよう．簡単な場合から順を追って定義していく．

1. 確率変数 X が有限個の値しか取らない場合．
   $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が X の可能な値の全体とする．このとき，
   $$EX := \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_X(\{a_i\}) \tag{11}$$
   で X の期待値 EX を定義する．

2. 確率変数 X が非負の値を取る場合．
   $n \geq 1$ に対して有限個の値しか取らない確率変数 X_n を
   $$X_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n},\ 0 \leq k \leq n2^n - 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$
   と定義する．$n \to \infty$ のとき，$X_n(\omega)$ は単調に増大して $X(\omega)$ に収束する．このとき，
   $$EX := \lim_{n\to\infty} EX_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mu_X([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) \tag{12}$$

$EX < \infty$ のとき，X は**可積分**であるという．ルベーグ積分の定義を思い出すと，(12) 式右辺は

$$\int_0^\infty x\mu_X(dx)$$

とかけることに注意する．

3. X が一般の確率変数の場合．

$$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$$

とおくと，この新しい確率変数 X^+, X^- はともに非負の値を取り，$X = X^+ - X^-$ とかける．X^+, X^- がともに可積分のとき X は**可積分**であるといい，このとき，

$$EX := EX^+ - EX^- = \int_{-\infty}^{\infty} x\mu_X(dx) \tag{13}$$

によって X の期待値 EX を定義する．

4. 確率変数 $Y = f(X)$ の期待値
f を ボレル可測関数とする．つまり任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbf{R}; f(x) \in A\} \in \mathcal{B}$$

が成り立つとする．X が確率変数のとき，

$$Y(\omega) := f(X(\omega))$$

と定義すると，Y も確率変数になる．実際，$A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned} Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; f(X(\omega)) \in A\} &= \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in f^{-1}(A)\} \\ &= X^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \end{aligned}$$

で，f の可測性から $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ で，X は確率変数なので，$X^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \in \mathcal{F}$ となり，$Y^{-1}(A) \in \mathcal{F}$，つまり Y も確率変数となる．
$f \geq 0$ のとき，EY を求めてみると，

$$\begin{aligned} EY &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P(\frac{k}{2^n} \leq f(X) < \frac{k+1}{2^n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{k}{2^n}\mu_X(f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_X(dx) \end{aligned} \tag{14}$$

となる．ルベーグ積分の定義と同じである．したがって，一般の f に対しては $f=f^+-f^-$ と分解して，$f^+(X), f^-(X)$ がともに可積分ならば $f(X)$ は可積分であるといい，

$$Ef(X)=Ef^+(X)-Ef^-(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[f^+(x)-f^-(x)]\mu_X(dx)$$

で与えられる．

3.2 モーメント，分散

$n\geq 1$ に対して，$f(x)=x^n$ のとき，$Ef(X)=EX^n$ が定義できるとき，これを X の **n 次のモーメント**と呼ぶ．平均を引いて考えるとき，$E(X-EX)^n$ を X の **n 次の中心化モーメント**と呼ぶ．特に $n=2$ のとき，$E(X-EX)^2$ は X の**分散**と呼ばれる重要な量で $\mathrm{Var}(X)$ と表される．

例 3.1 X を正規分布 $N(m,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ に従う確率変数とするこのとき $EX=m, \mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ となる．実際，(13), (14) により

$$\begin{aligned}
EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y\sigma+m)e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad (y=\frac{(x-m)}{\sigma} \text{ と変数変換}) \\
&= 0+m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad (\text{ 上と同じ変数変換 }) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-ye^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

例 3.2 X をパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布に従う確率変数とする．このとき，　$EX = \lambda, \mathrm{Var}(X) = \lambda$ である．実際,

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\lambda)^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2\lambda n + \lambda^2) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} - 2\lambda^2 + \lambda^2 \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

問題 3.1　2 項分布 $B(n,p)$,　(n は自然数,　$0 < p < 1$) に従う確率変数の平均と分散を求めよ.

問題 3.2 パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従う確率変数の平均と分散を求めよ．ヒント：密度関数は $\lambda e^{-\lambda x}$ なので、例えば平均は

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

を計算する事になる。

問題 3.3　*advanced course*
コーシー分布に従う確率変数には平均が定義できないことを確かめよ.
ヒント：

$$EX^+ = \int_0^{\infty} \frac{a}{\pi} \frac{x}{a^2 + x^2} dx$$

（この問題は興味のある人だけ解けばよい．—**提出不要**）