確率論　I　第８回講義ノート 2006.12.01

3.3　期待値の性質

確率変数 X の期待値 EX の基本的な性質を列挙しておこう

Theorem 3.1 (i) （線形性） X, Y が可積分な確率変数のとき，実数 a, b に対して $aX+bY$ も可積分な確率変数となり，

$$E(aX+bY) = aEX + bEY$$

(ii) (σ-加法性） X が可積分な確率変数のとき，$A \in \mathcal{F}$ に対して

$$E[X; A] := E(X \cdot 1_A)$$

と定義し，X の A **上の期待値** と呼ぶ．このとき，$\{A_n; n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ が背反ならば，

$$E[X; \bigcup_{n\geq 1} A_n] = \sum_{n\geq 1} E[X; A_n]$$

(iii) （単調収束定理） $X_n, n \geq 1$ がすべて可積分な非負の確率変数で，

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots \leq X_n(\omega) \leq \ldots \nearrow X(\omega)$$

が確率 1 で成立するならば，

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX$$

(iv) （Fatou の補題）$X_n, n \geq 1$ がすべて非負の確率変数のとき，

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n$$

(v) （Lebesgue の収束定理）$X_n, n \geq 1$ がすべて可積分な確率変数で，ある可積分な確率変数 X と Y が存在して，

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \forall n \geq 1, \qquad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が確率 1 で成り立つならば，

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX$$

証明は省略する．(西尾真喜子「確率論」参照)

Theorem 3.2 （チェビシェフ [Chebyshev] の不等式）
$f(x)$ が非負単調非減少なとき，確率変数 X について $f(X)$ が可積分ならば，

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)} \tag{15}$$

が任意の $f(\lambda) > 0$ となる λ に対して成立する．

証明　$X(\omega) > \lambda$ のとき，$f(X(\omega)) > f(\lambda) > 0$ なので，

$$\frac{f(X(\omega))}{f(\lambda)} \geq 1$$

であり，この期待値を $\{X \geq \lambda\}$ 上で取ることにより，

$$E\Big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}\Big] \geq E\Big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}; X \geq \lambda\Big] \geq P(X \geq \lambda)$$

最初の不等式は f が非負なことから出る．期待値の線形性からこの式は (15) と同じ．

Theorem 3.3 （Hö1der の不等式）$1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし，$|X|^p, |Y|^q$ がともに可積分とするとき，

$$|E[XY]| \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (E[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

証明　まず次の不等式を用意する．$x, y > 0$ のとき，

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy \tag{16}$$

この式の証明は後にして，定理を証明しよう．記号として，

$$\|X\|_p := \left\{E|X|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|Y\|_q := \left\{E|Y|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

と書くことにして，(16) で $x = \frac{|X(\omega)|}{\|X\|_p}$, $y = \frac{|Y(\omega)|}{\|Y\|_q}$ とおくと，

$$\frac{1}{p}\frac{|X(\omega)|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y(\omega)|^q}{E(|Y|^q)} \geq \frac{|X(\omega)Y(\omega)|}{\|X\|_p\|Y\|_q}$$

この式の期待値を取ると，

$$\frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 \geq \frac{E(|XY|)}{\|X\|_p\|Y\|_q}$$

左辺は仮定から 1 に等しいので，

$$\|X\|_p\|Y\|_q \geq E(|XY|)$$

を得るが，これは定理の主張している式と同じ．
最後に (16) を証明しよう．両辺を x^p で割った式は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\frac{y^q}{x^p} \geq \frac{y}{x^{p-1}}$$

仮定から $q = \frac{p}{p-1}$ だから，$x^p = (x^{p-1})^q$ なので，$\xi = \frac{y}{x^{p-1}}$ に対して，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\xi^q \geq \xi$$

を示せばよい．$\xi > 0$ のときこの式は正しい．

問題 3.4 $X \geq 0$ が常に成り立つとする．このとき， $EX = 0$ ならば $P(X=0) = 1$ となることを次の順で証明せよ．

(i) 自然数 $n \geq 1$ に対して $A_n \in \mathcal{F}$ を

$$A_n := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$$

とおく．このとき，

$$P(A_n) \leq nEX$$

を示せ．

(ii) 任意の自然数 n に対して $P(A_n) = 0$ を示せ．

(iii) $\{\omega \in \Omega; X(\omega) > 0\} = \cup_{n\geq 1} A_n$ であることから $P(X > 0) = 0$ を示せ．これは $P(X=0) = 1$ を示している．