確率論　I　第９回講義ノート 2006.12.08

4　独立確率変数列の極限定理

4.1　独立性

　たとえば赤いさいころと白いさいころを２個同時に投げたとき，赤いさいころの出す目の数と白いさいころの出す目の数の間には何の関係もないものと思われる．このことを数学的にはどのように表すのかを考える．このときに対応する確率空間は二つのさいころの出目を並べた

$$\Omega = \{(i,j); 1 \le i,j \le 6\},\quad \mathcal{F} = \ \Omega \text{ の部分集合全体},\quad P(i,j) = \frac{1}{36}$$

となる．赤いさいころの出目を X，白いさいころの出目を Y と書くとき，上の確率は

$$P(i,j) = P(X=i, Y=j) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(X=i)P(Y=j)$$

と書けることに注意すると，$A, B \subset \{1,2,\ldots,6\}$ のとき，

$$\begin{aligned} P(X \in A,\ Y \in B) &= \sum_{i\in A}\sum_{j \in B} P(X=i, Y=j) \\ &= \left(\sum_{i \in A} P(X=i)\right)\left(\sum_{j\in B} P(Y=j)\right) \\ &= P(X\in A)P(Y \in B) \end{aligned} \tag{17}$$

と，確率の積になる．数学的にはこの式が独立性の定義になる．

定義 4.1 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において，二つの事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が**独立**であるとは，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{18}$$

となるときに言う．さらに，n 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ が **独立**であるとは，この中から任意に選んだ $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$ （ただし， $1 \leq m \leq n$ ）について，

$$P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_m}) = \prod_{i=1}^{m} P(A_{k_i}) \tag{19}$$

となるときに言う．最後に，無限個の事象族 $A_\lambda \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \Lambda$ が**独立**であるとは，この 任意の有限部分族 $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n}$ が独立なときに言う．

二つの集合族が独立であるというのも考えることがある．

定義 4.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において，二つの集合族 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ が **独立**であるとは，それぞれの任意有限個の部分族 $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}$, $\{B_\ell\}_{\ell=1}^m \subset \mathcal{H}$ について，

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B_1 \cap \ldots \cap B_m) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) P(B_1 \cap \ldots \cap B_m)$$

が成り立つときに言う．

確率変数の独立性については次の様になる．

定義 4.3 二つの確率変数 X, Y が**独立**とは，任意のボレル集合 A, B に対して

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

となるときに言う．同様に n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が **独立**であるとは，任意の $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \in A_j)$$

となるときに言う．
無限個の確率変数 $\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ が**独立**とはこの中の任意有限個の確率変数の組 $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$ が独立なときに言う．

Theorem 4.1 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ が独立であることと次の条件が成立することは同値である．
任意の有界なボレル可測関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対して

$$E\Big[\prod_{j=1}^{n} f(X_j)\Big] = \prod_{j=1}^{n} E\big[f(X_j)\big] \tag{20}$$

が成り立つことである．

証明　(十分性) 任意のボレル集合 $B_1,\dots,B_n$ に対して，$f_j(\omega)=1_{A_j}(\omega)$ とおくと，これらは有界なボレル関数だから (20) から

$$E\big[\prod_{j=1}^{n}1_{A_j}(X_j)\big]=\prod_{j=1}^{n}E\big[1_{A_j}(X_j)\big]=\prod_{j=1}^{n}P(X_j\in A_j) \tag{21}$$

一方，

$$\prod_{j=1}^{n}1_{A_j}(X_j(\omega))=1\Leftrightarrow X_j(\omega)\in A_j\ \forall j$$

だから

$$E\big[\prod_{j=1}^{n}1_{A_j}(X_j)\big]=P(\{X_1\in A_1\}\cap\ldots\cap\{X_n\in A_n\})$$

となり，$X_1,\dots,X_n$ は独立．
(必要性) $X_1,\dots,X_n$ が独立とする．このとき定義から任意のボレル集合 $A_1,\dots,A_n$ に対して (21) が成り立つ．これから各 f_j が階段関数のとき，つまり

$$f_j(\omega)=\sum_{k=1}^{N_j}c_k^{(j)}1_{A_k^{(j)}}(\omega)$$

の形のときにも (20) は次のようにして成り立つ．

$$\begin{aligned}
E\big[\prod_{j=1}^{n}f_j(X)\big] &= \sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n}E\big[\prod_{j=1}^{n}1^{(j)}_{A_{k_j}}(X_j)\big]\\
&= \sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n}\prod_{j=1}^{n}E\big[1^{(j)}_{A_{k_j}}(X_j)\big]\\
&= \prod_{j=1}^{n}\left(E\big[\sum_{k_j=1}^{N_j}c^{(j)}_{k_j}1^{(j)}_{A_{k_j}}\big]\right)\\
&= \prod_{j=1}^{n}E\big[f_j(X_j)\big]
\end{aligned}$$

各 f_j が非負のときは $f_j^{(\nu)} \nearrow f_j$ となる非負の階段関数を取ることにより単調収束定理から

$$\begin{aligned} E\big[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)\big] &= \lim_{\nu\to\infty} E\big[\prod_{j=1}^n f_j^{(\nu)}(X_j)\big] \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \prod_{j=1}^n E\big[f_j^{(\nu)}(X_j)\big] \\ &= \prod_{j=1}^n E\big[f_j(X_j)\big] \end{aligned}$$

最後に，一般の有界なボレル可測関数 f_j については，$f_j = f_j^+ - f_j^-$ と書くことで，

$$\begin{aligned} E\big[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)\big] &= \sum_{\varepsilon_1=+1,-1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=+1,-1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n E\big[\prod_{j=1}^n f_j^{\varepsilon_j}(X_j)\big] \\ &= \sum_{\varepsilon_1=+1,-1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=+1,-1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \prod_{j=1^n} E\big[f_j^{\varepsilon_j}(X_j)\big] \\ &= \prod_{j=1}^n E[f_j(X_j)] \end{aligned}$$

問題 4.1 X, Y が確率変数であるとき，組 X, Y の**同時分布** $\mu_{X,Y}$ とは $\mathbf{R}^2$ 上の確率で，任意のボレル集合 A, B に対して

$$\mu_{X,Y}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$$

によって定義される．ただし， $A \times B$ は

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \in A, y \in B\}$$

で定義される直積図形である．このとき，X, Y が独立ならば,

$$\mu_{X,Y}(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$$

が成り立つことを示せ．ただし，μ_X, μ_Y はそれぞれ X, Y の分布である．

問題 4.2 X, Y が独立で，X^2, Y^2 が可積分のとき,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

がなりたつことを証明せよ．ついでに

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

が成り立つことも証明せよ.