11 変数の変換

11.1 極座標での積分（２次元）

関数 $f(x,y)$ を極座標を使って積分する方が簡単な時がある。
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき、r が $[r, r+\Delta r]$ を、θ が $[\theta, \theta+\Delta\theta]$ を動く時の面積の変化は、近似的に $\Delta r \times r\Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta$ だから、たとえば円盤 $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ 上で f を積分すると、

$$\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

という公式が成り立つ。（３次元で同じことを考えるのは既に難しい。一般的な置換積分の公式を使う方が良い。）

例 11.1 $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \log(x^2+y^2)dxdy$ を求めよ。

解 $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと、求める積分は

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] 2r\log r dr &= 2\pi\left(\left[r^2\log r\right]_0^1 - \int_0^1 rdr\right)\\ &= -\pi\end{aligned}$$

注意 11.1 上の計算で $0\log 0 = 0$ と計算しているが、これはいつものように

$$\int_0^1 2r\log r dr = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 2r\log r dr$$

として計算すると、$\varepsilon \to 0$ のとき、$\varepsilon^2\log\varepsilon \to 0$ を言っている。いろいろな確かめ方があるが、ロピタルの定理によると、

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\varepsilon &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^2}}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2}{\varepsilon^3}}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -2\varepsilon^2 = 0\end{aligned}$$

と確かめる事ができる。

11.2　一次変換による置換積分（２次元）

$x = \alpha u + \beta v,\ \ y = \gamma u + \delta v\ \ (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$ という変換で領域 D 上の積分

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

がどの様に書きかえられるかを見よう。$(x,y) \in D$ という条件は、$\mathbf{u} = (u,v)$ とかくとき u-v 座標で書くと、

$$\mathbf{u} \in A^{-1}(D) = \{\mathbf{u}\ ;\ \mathbf{x} = \mathbf{u}A \in D\}$$

となる。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

である。

u-v 平面 で (u,v) が単位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ を動く時、x-y 平面では (x,y) が (α,γ) と (β,γ) という２つのベクトルがつくる平行四辺形を動く。この平行四辺形の面積は $|\det A| = |\alpha\delta - \beta\gamma|$ で与えられる。すなわち、(u,v) が微小面積 $dudv$ を動く時、その像 (x,y) $(x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v)$ は微小面積 $|\det A| \times dudv$ を動いている。これを集めて、

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{A^{-1}D} f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)|\det A|dudv$$

という式を得る。

例 11.2 次の２重積分を計算せよ。

$$I = \int\int_D (x+y)^2 e^{x-y} dxdy \qquad \text{ただし、} D = \{(x,y)\ |\ |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$$

解答　$u = (x+y),\ v = (x-y)$ とおくと、$x = (u+v)/2,\ y = (u-v)/2$ なので、変換 $(u,v) \mapsto (x,y)$ の行列式 は

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -1/2$$

である。また、この変換で、D と $\{(u,v)\ ;\ |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$ は １対１に対応しているので、求める積分は

$$I = \int\int_D (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^2 \left[\int_{-1}^{1} e^v dv\right] du \\
&= \frac{e-e^{-1}}{2}\int_{-1}^{1} u^2 du \\
&= \frac{e-e^{-1}}{3}.
\end{aligned}
$$

練習 11.1　公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

の証明：

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]^2 = \int\int_{x\geq 0, y\geq 0} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

であることを用いて、極座標に変数を変換し、この重積分の値が $\frac{\pi}{4}$ となることを示せ。

練習 11.2　次の重積分を計算せよ。

1) $\displaystyle\int_{\{1\leq x^2+y^2\leq 3\}} \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$

2) $\displaystyle\int\int_D x\,dxdy$　　ただし、$D=\{0\leq x+y\leq 2,\ 0\leq x-y\leq 1\}$

宿題 11.1　つぎの重積分を計算せよ。

1) $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}} xy\,dxdy$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2-y^2}dxdy$

3) $\displaystyle\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy$

ヒント:　$u=(x+y)/2,\ v=(x-y)/2$ の変換を使ってみる。

4) $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4\right] dxdy$