演習問題、宿題の訂正は１月３０日まで。大教センター C 棟５階数学事務室前のレポートボックスに提出できます。

12 変数の変換：Jacobian

12.1 一般の変数変換

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ という変数変換で置換積分の公式はどうなるかをみる。$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ とまとめて書くことにして、$\mathbf{u} \in G$ が１対１で $\mathbf{x} \in D$ に写像 Φ でうつるものとする。このとき、$\mathbf{u}$ が微小領域 $dudv$ を動く時、像 $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ は、$(\varphi_u(u, v)du, \psi_u(u, v)du)$ と $(\varphi_v(u, v)dv, \psi_v(u, v)dv)$ によって作られる平行四辺形に近似的に近い領域にうつるので、面積は $dudv$ の近くでは

$$\begin{aligned} & |\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) - \varphi_v(u,v)\psi_u(u,v)|dudv \\ = & \left|\det\begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix}\right| dudv + o(dudv) \end{aligned}$$

となってうつる。したがって変数変換の公式は

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

と書かれる。ここに、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は、変数変換 $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ の **ヤコビアン (Jacobian)** と呼ばれ、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix}$$

で定義される。

12.2 一般の d 次元の変数変換

$x_j = \varphi_j(u_1, \ldots, u_d)$, $\quad 1 \le j \le d$ という変数変換のときの置換積分の公式は、$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in G$ が $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in D$ に写像 $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ で１対１にうつるとする時、

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_d)dx_1 \cdots dx_d \\ = & \int \cdots \int_G f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_d), \ldots, \varphi_d(u_1, \ldots, u_d)) \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(u_1, \ldots, u_d)}\right| du_1 \cdots du_d \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、ヤコビアン $\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(u_1,\ldots,u_d)}$ は、次のようになる。

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(u_1,\ldots,u_d)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_d}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_d}{\partial u_d} \end{pmatrix}$$

例 12.1 ２次元の極座標による変数変換

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって、円板 $\{x^2+y^2 \le 1\}$ は原点 $(0,0)$ を除いて１対１に $\{0 \le \theta < 2\pi,\ 0 < r \le 1\}$ に対応する。$\{0 \le \theta < 2\pi,\ r = 0\}$ の面積は 0 なので、このとき、

$$\int\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1\}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta$$

となり、変換のヤコビアンを計算してみよう。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

したがって、極座標の変換公式

$$\int\int_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right] rdr$$

が得られた。

例 12.2 ３次元の極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\phi$$

によって、球 $B = \{(x,y,z)\ ;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 上の積分は

$$\begin{aligned} & \int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz \\ = & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) r^2 \sin\phi d\phi d\theta dr \end{aligned}$$

となることを確かめよ。

解　$(x,y,z) \in \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ のとき、$x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi$ とかくと、$(x,y) \neq (0,0)$ ならば、これから $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \phi = \mathrm{Arccos}\big(\frac{z}{r}\big)$, および、

$$\theta = \begin{cases} \mathrm{Arccos}\big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big), & y > 0 \text{ のとき;} \\ -\mathrm{Arccos}\big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big), & y \leq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

となる。ただし、$\mathrm{Arccos}u$ は $\cos\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ の逆関数。これにより、$(x,y) \neq (0,0)$ のとき、(x,y,z) と (r,θ,ϕ) は１対１に対応する。$(x,y) = (0,0)$ のとき、θ の値は何でもよくなり、１対１の対応ではないが、このような領域の体積は 0 なので、その上の関数の積分は 0 となり無視して良い。したがって、この変換は

$$(x,y,z) \in \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \quad \longleftrightarrow (r,\theta,\phi) \in \begin{pmatrix} 0 < r \leq 1 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 < \phi < \pi \end{pmatrix}$$

で１対１の対応となり、求める積分は上の (r,θ,ϕ) の領域上の積分と思うことができる。

残る問題は変換のヤコビアンを求めることである。

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix} = -r^2\sin\phi$$

ゆえに、この絶対値をとって求める式を得る。

練習 12.1　次の重積分の計算をせよ。

1) $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 2\}} (a^2x^2+b^2y^2)dxdy$

2) $\displaystyle\int\int_{\{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}\leq 1\}} (x^2+y^2)dxdy$

宿題 12.1　つぎの重積分を計算せよ。

1) $\displaystyle\int\int\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}} x^2\,dxdydz$

2) $\displaystyle\int\int\int_{\{x^2+y^2+z^2< 1\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\,dxdydz$

参考　ベータ関数とガンマ関数の関係

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\qquad (p,q>0)$$

なども 2 重積分の変数変換を利用して証明される。

$p,q>0$ に対してガンマ関数 $\Gamma(p)$, ベータ関数 $B(p,q)$ は次の式で与えられる。

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx,\quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

$\Gamma(p)$ について言えば $x=0$ で発散する被積分関数を持つ可能性があり、($p<1$ のとき) また積分区間が無限区間なので、広義積分で

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^n e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

によって与えられる。被積分関数は正なので右辺は $n\to\infty,\varepsilon\to0$ のとき単調に増大して行くので、この値が上に有界である事を言っておけば良い。

$B(p,q)$ についても 0 または 1 で被積分関数が発散する可能性があり、(それぞれ $p<1$ または $q<1$ のとき) 広義積分で定義され

$$B(p,q)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

で与えられる。これも被積分関数が正なので、この値が上に有界な事を言っておけばちゃんと関数が定義できる事が分かる。

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx\\ &\le \int_0^1 x^{p-1}\,dx+C(p)\int_1^\infty x^{-2}\,dx\\ &= \frac{1}{p}+C(p)\end{aligned}$$

である。ただし、

$$C(p)=\max_{x\ge1}e^{-x}x^{p+1}=\left(e^{-1}(p+1)\right)^{p+1}$$

とする。これにより、$\Gamma(p)$ が定義できる事が分かる。一方、

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \int_0^{\frac12} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{\frac12}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\\ &\le \max\{1,2^{1-q}\}\int_0^{\frac12} x^{p-1}+\max\{1,2^{1-p}\}\int_{\frac12}(1-x)^{q-1}\,dx\\ &\le \max\{1,2^{1-p},2^{1-q}\}\left[\frac{2^{-p}}{p}+\frac{2^{-q}}{q}\right]\end{aligned}$$

右辺は有限な値なので、これで $B(p,q)$ が定義できる事も分かる。
　さて、いよいよ本題の等式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を証明しよう。これには $\Gamma(p)\Gamma(q)$ から出発する。

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}\,dy \\ &= \int\int_{\{x>0,y>0\}} e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dxdy\end{aligned}$$

と書いておいて、 $u = x+y, x = uv$ と変換する。このとき、 $y = u(1-v)$ なので、$\{x,y>0\}$ はこの変換で $\{0<u, 0<v<1\}$ へとうつされる。変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = -u$$

であるから、

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \left[\int_0^1 e^{-u}(uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1}udv\right]du = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

が得られる。