4　合成関数の微分、連鎖公式

4.1　1 変数と多変数の関数の合成とその微分

x, y がそれぞれ t の関数で微分可能、f が x, y の関数で全微分可能のとき、$z(t) := f\big(x(t), y(t)\big)$ に対して

$$\frac{dz(t)}{dt} = f_x(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + f_y(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt} \tag{4.1}$$

が成り立つ。簡単にかくと、

$$\frac{df}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt}$$

となる。(4.1) を **Cahin Rule（連鎖公式：合成関数の微分公式）** と呼ぶ。

証明　$z(t) = f(x(t), y(t))$ とかき、$\triangle t \to 0$ のとき、

$$\triangle x = x(t + \triangle t) - x(t), \quad \triangle y = y(t + \triangle t) - y(t)$$

とかくと、

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} \to x'(t), \quad \frac{\triangle y}{\triangle t} \to y'(t)$$

である。また、f の全微分可能性から

$$\begin{aligned} z(t + \triangle t) - z(t) &= f_x(x(t), y(t))\triangle x + f_y(x(t), y(t))\triangle y \\ &\quad + o\left(\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}\right) \end{aligned}$$

となる。両辺を $\triangle t$ で割って $\triangle t \to 0$ とすれば求める式を得る。

4.2　多変数と多変数の関数の合成

f が x, y の関数で、x, y がそれぞれ u, v の関数なら、f はまた u, v の関数であり、f が x, y について全微分可能で x, y が u, v について偏微分可能な時、次の公式（多変数の Chain Rule）が成立する。

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x(u, v), y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

これも簡単には次のようにかく

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{または} \quad f_u = f_x x_u + f_y y_u$$

証明は、１変数の Chain Rule の証明と同じ様にやれば良い。

例 4.1 $f(x,y)$ は偏導関数 f_x, f_y をもち、かつ f_x, f_y が連続であるとする。（このことを「f は C^1 級である」という。）このとき、

$g(r,\theta) = f(r\cos\theta + r\sin\theta, r\cos\theta - r\sin\theta)$ とおくとき、$\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を f_x, f_y を用いて表わせ。

解 Chain Rule （連鎖公式）により、$x = r\cos\theta + r\sin\theta,\ \ y = r\cos\theta - r\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{\partial g}{\partial r} = f_x[\cos\theta + \sin\theta] + f_y[\cos\theta - \sin\theta] = [f_x + f_y]\cos\theta + [f_x - f_y]\sin\theta$$

を得る。同様に、

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = f_x[-r\sin\theta + r\cos\theta] + f_y[-r\sin\theta - r\cos\theta] = [f_x - f_y]r\cos\theta - [f_x + f_y]r\sin\theta$$

例 4.2 (1) $f(x,y)$ は C^1 級の関数とする $z = f(x,y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき、次の等式を証明せよ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

(2) z は x, y の C^1 級関数、x, y はともに、u, v の C^1 級関数とする。$dx = x_u du + x_v dv,\ dy = y_u du + y_v dv,\ dz = z_u du + z_v dv$ とかくとき、$dz = z_x dx + z_y dy$ が成り立つことを証明せよ。（全微分の不変性）

解 (1) Chain Rule (連鎖公式）により、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

また、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

なので、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \big[f_x\cos\theta + f_y\sin\theta\big]^2,\quad \frac{1}{r}^2\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \big[-f_x\sin\theta + f_y\cos\theta\big]^2$$

となり、これから求める式が得られる。

(2) Chain Rule（連鎖公式）により、

$$\begin{aligned} z_u &= \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = z_x x_u + z_y y_u \\ z_v &= \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = z_x x_v + z_y y_v \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} dz &= (z_x x_u + z_y y_u)du + (z_x x_v + z_y y_v)dv \\ &= z_x(x_u du + x_v dv) + z_y(y_u du + y_v dv) = z_x dx + z_y dy \end{aligned}$$

例 4.3 $f(x,y)$ が C^2 級で、 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ が (u,v) の C^2 級の関数ならば、 $z = f(x(u,v), y(u,v))$ に対して

$$z_{uu} = f_{xx}x_u^2 + 2f_{xy}x_u y_u + f_{yy}y_u^2 + f_x x_{uu} + f_y y_{uu} \tag{4.2}$$
$$z_{uv} = f_{xx}x_u x_v + f_{xy}(x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy}y_u y_v + f_x x_{uv} + f_y y_{uv} \tag{4.3}$$
$$z_{vv} = f_{xx}x_v^2 + 2f_{xy}x_v y_v + f_{yy}y_v^2 + f_x x_{vv} + f_y y_{vv} \tag{4.4}$$

という式が成立する。ただし、右辺の f の偏導関数の中に入る変数は $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ である。

証明 (4.2) のみ示す。まず、連鎖公式により、

$$z_u = f_x x_u + f_y y_u$$

で、f_x, f_y は $x = x(u,v), y = y(u,v)$ の C^1 級の関数。そこで、上式を再び u で偏微分すると、積の微分公式より、

$$z_{uu} = \left[f_{xu}x_u + f_x x_{uu}\right] + \left[f_{yu}y_u + f_y y_{uu}\right] \tag{4.5}$$

ここで、連鎖公式を f_x に使うと、

$$f_{xu} = (f_x)_u = f_{xx}x_u + f_{xy}y_u$$

同様に、

$$f_{y_u} = (f_y)_u = f_{yx}x_u + f_{yy}y_u$$

となるので、これらを (4.5) に代入して

$$z_{uu} = \{f_{xx}x_u + f_{xy}y_u\}x_u + f_x x_{uu} + \{f_{yx}x_u + f_{yy}y_u\}y_u + f_y y_{uu}$$

これをまとめると (4.2) 式になる。

練習 4.1　1) 次の式で表される合成関数 $z(x(t), y(t))$ について $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ。

(a) $z = \log(x+y),\quad x = \tan t,\quad y = \sec t (= \dfrac{1}{\cos t}) \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$

(b) $z = \dfrac{x+y}{x-y},\quad x = t-1,\quad y = \dfrac{2}{t} \quad (0 < t < 2)$

2) 上の $(4.3), (4.4)$ 式を証明せよ。

宿題 4.1 $f(x,y) = x^2 + y^3$, に $x = x(u,v) = \cos u + \sin v, y = y(u,v) = u - v$ を代入した関数

$$z = f(x(u,v), y(u,v))$$

について、$z_u, z_v, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$ を求めよ。

宿題 4.2 理想気体の状態方程式は、圧力 p 体積 V 温度 T を用いて $pV = RT$ と表わされる。（R は気体定数）このとき、p, V, T はそれぞれ他の 2 変数の関数となる。$S = \alpha \log T + R \log V + \beta$（ α, β ：定数）によってエントロピー S を定義するとき、次の等式を示せ。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ここで、たとえば $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ は S を V と T の関数と考えて、V について偏微分することを意味する。