5　行列式の演算

行列式を計算するときの効率的な方法をどう探すかを考えるためには、行列式がどのような性質を持つかを良く知る必要がある。

5.1　行列式の展開

前回 3 次の行列で説明した事は、一般の n 次正方行列の行列式にも当てはまる。
n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ の定義は余因子を使って

$$|A| = a_{11}|\overline{A_{11}}| - a_{21}|\overline{A_{21}}| + \ldots + a_{n1}(-1)^{n+1}|\overline{A_{n1}}|$$

と定義したが、これを $|A|$ を第 1 列で展開した式と言う。第 1 列の代わりに第 j 列で展開する事もできる。

$$|A| = a_{1j}(-1)^{1+j}|\overline{A_{1j}}| + a_{2j}(-1)^{2+j}|\overline{A_{2j}}| + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}|\overline{A_{nj}}|$$

ただし、$\overline{A_{ij}}$ は、元の行列 A から第 i 行と第 j 列を除いた行列。
列でなく行で展開する事もできる。第 i 行で展開すると

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}| + a_{i2}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}| + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}|$$

が成り立つ。これは帰納法で証明できるが、省略する。

5.2　行列式の性質

以下に行列式の満たす性質を挙げる。これらの性質を使うと計算が簡単になる。

1. 正方行列 A の行列式とその転置行列 A^T の行列式は同じ。つまり、

$$|A| = |A^T|$$

以下、列に対して成り立つ計算はこのことから行に対しても成り立つ。

証明は $|A|$ の第 1 行での展開と A^T の第 1 列での展開を見比べて帰納法を使えばいい。

2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j}+b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj}+b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明は左辺の行列式を第 j 列で展開してみればいい。

3. r を実数として、A の一つの列を r 倍すると、行列式は r 倍になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & ra_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & ra_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これも左辺を第 j 列で展開するといい。

4. 二つの列を入れ換えると、行列式の符号が変わる。いま、$j < k$ とすると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明はちょっと面倒だが、両辺をそれぞれ第 j 列で展開して、それぞれの余因子にでてくる行列式を、もう一度第 $k-1$ 列で展開した式をみるとよい。

5. 二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k$ が等しいとき、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式 $|A|$ の値は 0 になる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \overset{j}{\smile} & & \overset{k}{\smile} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

証明は左辺で第 j 列と第 k 列を入れ換えても行列が変わらないので、行列式は一緒だが、上の性質 4 により、符号が入れ替わるので、$|A| = -|A|$ が成り立つ。ゆえに $|A| = 0$.

6. 一つの列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} + ra_{1k} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} + ra_{nk} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明は、性質 2、性質 3 と性質 5 を使えばいい。

7. 正方行列 A が 正方行列 B, C によって、

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad A = \begin{pmatrix} B & O \\ E & C \end{pmatrix}$$

の形に分解されているとする。ただし、O は成分がすべて 0 の行列を表わす。このとき、

$$|A| = |B||C|$$

が成り立つ。

証明は B が 1×1 行列のときにはすぐに分かる。あとは帰納法。（教科書 p.72 参照）

8. A, B を n 次の正方行列とすると

$$|AB| = |A||B|$$

証明は、n 次正方行列 A, B に対して

$$\begin{vmatrix} B & -E_n \\ O & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

を示す事で得られる。ただし、E_n は n 次の単位行列。（教科書 p.73 参照）

例 5.1 これらの性質を使って次のように行列式を計算する事ができる。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{これに 性質 7 をつかうと、}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{右側の行列式で 第 2 列 $-$ 第 1 列 $\times 2$ をすると}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{第 1 行で展開して、}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 23 = 46$$

練習 5.1 次の行列式を計算せよ。（教科書 p.67 問題 3-2）

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$