

11 連立一次方程式の解の有無

連立 1 次方程式には、

1. 解を持たないもの
2. 解が唯一組あるもの
3. 解が無限にたくさんあるもの

の 3 種類に分かれる

例 11.1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

は解を持たない。

n 個の未知数 x_1, \dots, x_n に関する m 個の方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \quad (10)$$

の解を求めてみよう。 a_{ij} と c_j を並べた行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

は拡大係数行列と呼ばれる。係数行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を考える

と、拡大係数行列は A に 1 列を加えただけなので、簡約形にする事で、そのランクは $\text{rank}(A)$ か $\text{rank}(A) + 1$ のどちらかになる。拡大係数行列のランクが $\text{rank}(A) + 1$ のときは、行基本変形の結果

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} S & B & D \\ O & O & F \end{array} \right)$$

の形にかけ、 $\text{rank}(A) = r$ とかくとき、 S は r 個の零ベクトルでない行からなっている。 D は $r \times 1$ 行列 (r 次元縦ベクトル) であり、 F は $(m-r) \times 1$ 行列 ($m-r$ 次元縦ベクトル) で

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形をしている。この拡大係数行列の $r+1$ 行目に対応する方程式は

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 1$$

の形になり、この方程式は解を持たない事が分かる。したがって、考えている方程式 (10) は

拡大係数行列と係数行列のランクが等しいときだけ解がある

という事が分かる。

11.1 任意性のある解

先程の拡大係数行列を $(A | \mathbf{c})$ と書くことにしよう。 $\text{rank}(A | \mathbf{c}) = \text{rank}(A) + 1$ のときには方程式 (10) は解を持たなかった。 $\text{rank}(A | \mathbf{c}) = \text{rank}(A)$ のときを考えよう。

1) $\text{rank}(A) \leq n$ であるが、最初に $\text{rank}(A) = n$ のときを考える。このとき、 $m \geq n$ となるが、 A は基本変形により、簡約形

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix}$$

となり、したがって行基本変形の組合せの m 次の正則な行列 P がとれて

$$PA\mathbf{x} = \begin{pmatrix} E_n \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix} \mathbf{x} = P\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ここで、 \mathbf{c}' は n 次元縦ベクトルで、 $\mathbf{0}$ は $m-n$ 次元の零ベクトル (縦ベクトル) である。($\text{rank}(A | \mathbf{c}) = \text{rank}(A)$ だから。) したがって

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}'$$

が成り立っており、このときは解が唯一組決まる。

2) $n > \text{rank}(A)$ のとき。このときは、簡約形にしたときの主成分に対応する以外の x_i 達に、任意に値を与える毎に解が一組ずつ決まる。このように、拡大係数行列を簡約形にする事で、方程式を解く事ができる。

例 11.2

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

を解く事を考える。

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

となり、拡大係数行列のランクと係数行列のランクが等しく 2 である。また、主成分に対応する変数は x, y なので、 $z = t$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解になる。

11.2 同次方程式

連立一次方程式 (10) で、すべての i について $c_i = 0$ となるものを同次方程式と呼ぶ。この方程式は $x_i = 0, 1 \leq i \leq n$ を自明に解として持つが、それ以外に解があるかどうかを調べよう。先程調べたように、 $\text{rank}(A) = n$ のとき基本変形により $x_i = 0$ がすべての i についてでてくるので、($c = \mathbf{0}$ である) このときは自明な解しかない。

$\text{rank}(A) < n$ ならば、基本変形で簡約形にしたとき、主成分が 1 となる行ベクトルが $\text{rank}(A)$ 個現れ、これ以外に対応する変数は自由に取って解が作れる。

例 11.3

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad (a \text{ は実数})$$

を解こう。

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1-a \end{array} \right)$$

なので、 $a \neq 1$ のときは係数行列の簡約形は E_2 になる。このときは $x = y = 0$ の自明な解しかない。

$a = 1$ のときは係数行列のランクが 1 になり、 $x = -y$ ならば何でも解になる。

練習 11.1 次の連立方程式は解を持つか。持つ場合は解を求めよ。ただし、 p は実数とする。(2) は 第 5 章演習問題 [1], (3))

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_3 = 5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + px_2 + x_3 = 0 \\ px_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$