12　固有値

行列を左からかける事でベクトルは別のベクトルにうつる。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

というように、一般には大きさも向きも変わる。しかし、行列によって写されたベクトルが元のベクトルの実数倍になっている場合がある。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

などがそうである。この様になる実数やベクトルは、左からかける行列とどのような関係があるのだろうか。

12.1　固有値と固有ベクトル

n 次の正方行列 A に対して、実数 λ と n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{11}$$

を満たすとき、λ は A の**固有値**、$\boldsymbol{x}$ は A の **固有値 λ に属する固有ベクトル**という。この定義から想像できるように、どんな値も A の固有値になるとは限らない。では、どのような λ が A の固有値になるのだろうか？

λ が A の固有値なら、これに属する固有ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ があり、(11) 式を満たしている。$A\boldsymbol{x} = \lambda E_n\boldsymbol{x}$ とかけるから、移項をすると

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

という同次方程式が得られ、これが $\boldsymbol{x}$ という自明でない解を持つためには

$$|A - \lambda E_n| = 0$$

が必要かつ十分になる。この方程式を固有方程式といい

$$\varphi_A(x) = |A - xE_n|$$

を A の固有多項式という。

12.2　固有値の計算、固有ベクトルの求め方

実際に例で固有値や固有ベクトルを求めてみよう。上の例の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては、$\lambda = -1, 3$ が固有値になり、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ 3 および -1 に属する固有ベクトルになる。

例 12.1 $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めてみる。固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

となるので、固有値は $-2, 3$ となる。固有値 -2 に属する固有ベクトルは $8x - 10y = -2x$ を満たすので、$x = y$ となり、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍のベクトルがすべて求める固有ベクトルになる。固有値 3 に属する固有ベクトルは $8x - 10y = 3x$ を満たすので、$x = 2y$ となり、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍のベクトルがすべて求める固有ベクトルになる。

n 次の正方行列に対する固有値を求めるには n 次方程式を解かないといけない。これは簡単ではない。また、$n = 2$ でも固有方程式が実数解を持たない事はあり得る。このときは実数の 2 次元空間内には固有ベクトルは無い事になる。（成分を複素数まで許したところで考えると固有値も固有ベクトルも求める事ができる。）固有値と固有ベクトルを使うと行列の n 乗が楽に計算できる。

例 12.2 上の例の $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ に対して固有ベクトルを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$AP = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので、P^{-1} を右からこの等式にかけると

$$A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

となる。$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と書く事にすると、

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

となり、これを n 回繰り返せば

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

となることが確かめられる。P^{-1} を求めよう

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

したがって求める A^n は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 2\cdot 3^n \\ (-2)^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(-2)^n + 2\cdot 3^n & -(-2)^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ -(-2)^n + 3^n & -(-2)^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

で与えられる。

注意 12.1 上の方法でいつも対角行列に変形できるわけではない。変形できるとき元の行列を対角化可能という。そうでない例としては

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

がある。

実際、もし、ある正則な行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって PAP^{-1} が対角行列になったとすると、

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

なので、PAP^{-1} の対角成分以外が 0 であることから $a = c = 0$ でなければならないが、このとき $|P| = ad - bc = 0$ となってしまい、P が正則であるという仮定に矛盾する。

したがって $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化できない事がわかる。

練習 12.1 次の行列に対して固有値を求めよ

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$