10月1日分 練習の解答

練習 1.1 (i) (a) 内積の性質 1 をベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ につかうと、

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

ここで内積の性質 4 をつかって普通に展開する事ができ、

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

ここで内積の性質の 1 と 2 を使うと右辺は $|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$ となる。
同じ計算を $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ に対してやると、

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$$

を得る。従って和をとると内積の部分がキャンセルして

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$$

となる。
(b) 今度は上で求めた二つの式の差をとれば良いので、

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

(ii) 実数 c_1,c_2 が

$$c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

をみたしているとする。このとき、$\boldsymbol{a}$ とこの式の両辺との内積をとると、

$$(c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$$

内積の性質の 4 により左辺を展開して、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ をつかうと、

$$c_1|\boldsymbol{a}|^2+c_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=c_1|\boldsymbol{a}|^2=0$$

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定しているので、その大きさは 0 ではない。したがって、上の式の最後の等式を $|\boldsymbol{a}|^2$ でわると $c_1=0$。最初の式にこれを代入すると

$$c_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

となるが、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ なので、この式は $c_2=0$ でなければ成り立たない。以上より $c_1=c_2=0$ でなければ成らない事がわかり、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1次独立となる。
(iii) 上のやり方で、すこし見方を変えて、

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \tag{1.1}$$

が成り立っているとき、任意の番号 i に対して $c_i=0$ と成っている事を言えば良いと考える。最初に i を任意に指定する。この i に対して (1.1) 式の両辺と $\boldsymbol{a}_i$ との内積をとると、

$$c_1\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_i+c_2\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_i+\ldots+c_n\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}_i=0$$

$j \neq i$ のときは仮定から $\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_i = 0$ だから左辺で残るのは $c_i|\boldsymbol{a}_i|^2$ のみ。 $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ だから $|\boldsymbol{a}_i|^2 \neq 0$ でわると、$c_i = 0$ となる。i は任意にとったから、これは $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ である事を示している。

講評

(i) は良くできていました。(ii) もまずまず良くできていました。(iii) ですが、$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ が１次独立なことを (ii) を使って示し、だから全体の $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_n$ が１次独立だと結論した人がかなり居ました。いいですねぇ！こういう考え方は好きですねぇ。うまく行けばかなりエネルギーの節約になる。数学的発想です。

残念ながら、１次独立にはこの論法は使えません。例を見てみましょう。$\boldsymbol{a}_1 = (1,0), \boldsymbol{a}_2 = (0,1), \boldsymbol{a}_3 = (1,1)$ とします。このとき、このうちどの二つのベクトルをとっても二つは１次独立です。例えば、$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると、成分で書いて

$$(x,0) + (y,y) = (0,0)$$

ですが、第 2 成分の等式から $0 + y = 0$ つまり $y = 0$ となり、第 1 成分の等式から $x + y = 0$ ですが、$y = 0$ だったので、 $x = 0$ もでて来ます。したがって、

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば} \quad x = y = 0$$

となり、定義から $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ は１次独立です。他も同じようにできます。

ところが、３つを同時に考えると、

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = 0$$

ですから、0 でない係数 $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ について

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = 0$$

が成り立っており、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立ではありません。（１次従属）

> つまり、たくさんのベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**１次独立**とは、**どのベクトル** a_i **も、その他のベクトル達** $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ **によっては表わせない**（正確には １次結合で表わせない）ことを言っているのです。

上記の２個づつ見ると言う発想は間違いではありましたが、１次独立の本質に迫るものでした。こういう間違いは発展性があって好ましいですね。