10月15日分 練習の解答

次回から教室が C506 に変わります。

練習 2.1 1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ だから、

$$\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} 3+1 & -2+3 \\ -1+4 & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
A-B &= \begin{pmatrix} 3-1 & -2-3 \\ -1-4 & 0-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} 3-8 & 9-4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 3-3 & -2 \\ 12-2 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} \\
ABC &= \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -30+25 & -15 & -10-10 \\ -6-15 & -3 & -2+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & -15 & -20 \\ -21 & -3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. 数学的帰納法による。$n=1$ のとき、示すべき等式の両辺とも $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるので、等式は正しい。n のとき正しいとして、$n+1$ のときも等式が成り立つ事を示す。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

最後の等式は帰納法の仮定による。これを計算すると

$$\text{右辺}=\begin{pmatrix} 2^n\cdot 2 & 2^n+2^n n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n(n+1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

となり、等式は $n+1$ でも正しい。
3. とにかく A^2 を計算してみると

$$A^2=\begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ひょっとして

$$A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

ではないかと思えるので、これを仮定して $n+1$ のときを考えると、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta & -\cos n\theta\sin\theta-\sin n\theta\cos\theta \\ \sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta & -\sin n\theta\sin\theta+\cos n\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

講評

1. のできは非常に良かったです。皆さん 2×2 行列の計算にはなれていますね。良い事です。行の数と列の数が違う行列の計算に戸惑った人も居ました。計算問題を繰り返している内になれるでしょう。教科書の問題を自分で解いてみてください。線形代数は加減乗除の計算しかありませんが、計算間違いしやすいので、ゆっくりひとつづつ計算して行く必要があります。間違ったひとは、なぜ間違ったのかを確認しておいてください。

2. は証明問題ですが、n に関する主張を証明せよというのですから、うまい証明がぱっと思い付かないときは、数学的帰納法をつかうことを考えてください。誰かが行っていましたが

   困ったときは帰納法

   というのは、真実を伝えています。これもまずまずたくさんの人ができていました。

3. は、一見証明問題に見えませんが、これも一般の n に関する式を求める問題なので、常套手段は

   (a) まず $n = 2, 3$ あたりを計算してみる。
   (b) その結果を眺めて一般の n のときの式を予想する。
   (c) 数学的帰納法を使って予想が正しい事を証明する。

   のステップをとります。今回は $n = 2$ のときの式がすでに一般の n のときの式を予想させます。ただ、三角関数の加法定理、倍角の公式を忘れたら難しい問題になりますね。復習しておきましょう。

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned}$$

   ですね。$A = B$ のときの式が倍角の公式です。この公式自身は覚えている人が多かったです。さすが、まだ受験勉強の時期から一年経っていないだけの事はあります。普通、左辺を書いてみると右辺が自然にでてくる人が多いのですが、右辺を見て左辺のように変形できるという使いかたもよくします。そこに気がつけば、この問題は標準的な問題です。

   この行列が回転を表す行列だという事を知っている人も居ました。ベクトルに一回この行列を書けると、θ だけ回転したベクトルが得られるわけですね。面白いですね。