11 月 12 日分 練習の解答

練習 6.1 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 2,3 \text{ 列にそれぞれ第 } 1 \text{ 列 } \times(-1) \text{ を加える}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & c-b \\ ab & b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 2 \text{ 列の共通因数 } c-a \text{ と第 } 3 \text{ 列の共通因数 } c-b \text{ を前へ} \\
&= (c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & b & a \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} \\
&= -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 2,3 \text{ 列に第 } 1 \text{ 列 } \times(-1) \text{ を加える}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 } 2,3 \text{ 列からそれぞれ共通因数} \\ b-a, c-a \text{ を前へ出し、第 } 1 \text{ 行で展開} \end{array} \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c^2+ac+a^2-b^2-ab-a^2) \\
&= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

練習 6.2 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 } 1 \text{ 行に第 } 4 \text{ 行 } \times 2 \text{ を加え、} \\ \text{第 } 2,3 \text{ 行に第 } 4 \text{ 行 } \times(-1) \text{ を加える} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 1 \text{ 列で展開} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 2 \text{ 列に第 } 3 \text{ 列 } \times 3 \text{ を加える} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 14 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{第 } 3 \text{ 行で展開} \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1-42) = 41
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{第 4 列に第 1,2,3 列を加える} \\
=& \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} && \text{第 4 列で展開} \\
=& \ 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{第 1 列を第 2,3 列に加える} \\
=& \ 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} && \text{下三角行列の行列式なので、6 章の例 6.1 より} \\
=& \ 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 16
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} && \begin{array}{c}\text{第 4 行に第 3 行} \times (-1) \text{ を加え} \\ \text{第 3 行に第 2 行} \times (-1) \text{ を加える}\end{array} \\
=& \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ 性質 5 による})
\end{aligned}$$

講評　そろそろ計算が怪しくなって来た人達が居ます。だいたい行列式を**いきなり展開し始めて計算間違いする人が多いです**。必ず行列式を変形して簡単な形にしてから展開してください。そのためには変形の方法をまちがえたらいけませんね。

練習 6.1 は因数分解の問題です。もっと因数分解できるのに途中で止めている人がチラホラありました。中学のころから因数分解は「これで終わりか、もっとできないか？」と確かめるように言われていたはずですね。今でもこの心得は生きています。

また、練習 6.2 の (2) の行列はきれいな形はしていますが、行列式は簡単に計算できるわけではありません。とにかく一つの行か列に 0 をたくさん集めるような変形をしてから展開しましょう。

いくつか重要な間違いが出て来ましたので、注意しておきます。これらの間違いは行列式を理解するには非常によいタイプの間違いです。

間違い 1　$2r$ 次正方行列 A が r 次正方行列 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を使って

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

とかけているとき、

$$|A| = |A_{11}||A_{22}| - |A_{12}||A_{21}|$$

と計算している人が居ました。いかにもありそうな形ですが、これは $A_{12} = 0$ または $A_{21} = 0$ のときには例でやったように正しいのですが、**一般には正しくありません**。でも、こういう発想は好きですね。

間違い 2　次のような質問をした人が居ました。

「第 1 行から第 2 行を引き、第 2 行から第 3 行を引き、第 3 行から第 1 行行を引く計算を同時にやって良いですか？」

なるほど、例でもいくつかの行変形を同時にやっていますね。でもこれはいけないのです。**あくまでも一つの行変形の結果に対して次の行変形を行うのです**。実際、上の計算を 3 次の正方行列でやってみましょう。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}$$

が正しいとしましょう。そうすると右辺は 第 2 行に 第 3 行を加えると

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-a21 & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}$$

となります。（最後は第 1 行に第 2 行を加えました。）つまり、どんな行列の行列式も 0 になってしまいます。これは最初に **やってはいけない計算をやったためです。** 同時に複数の行変形をするときは、必ず一つづつの行変形と同じ結果になることを確かめながらやってください。たとえば、

第 1,2 行に第 3 行を加えるのは構いません。

これは第 1 行に第 3 行を加えたあとに 第 2 行に第 3 行を加えるのと結果が同じだから良いのです。列変形でもこのことは同じです。