第1章　Brown 運動

1.1　歴史

Robert Brown (1827) 花粉を水に浮かべてその動きを観察.
　　非常に奇妙な動きをする.（まるで生きている様に）
　　どんな花粉も同じ様な動きをする．たとえ死んだ植物の花粉でも.
　　以後，この花粉の運動を Brown 運動と呼ぶことになる.

よく見ると，この動きは，それまでどの様に動いて来たかということはそれから後の動きには全く影響を与えていないようである.
複数の花粉の動きはなんの関連も見られない.
時間がたっても弱らないで，同じ動きかたをする.（二年間も観察した学者がいた.）

Albert Einstein(1905) この動きは，Einstein により水の分子が花粉に衝突しておこる運動であることが説明された.

Jean Perrin(1908) コロイド溶液を使った実験で Einstein の理論を実証

Nobert Wiener (1923) そのような Brown 運動の理想化が数学的な Brown 運動の定義．Wiener にちなんで（実際の花粉の運動とは違う**理想化**という意味もこめて） Wiener 過程ともよばれる.

これが，通常語られる数学における Brown 運動の歴史であるが，実はまったく違うところに似たような研究がなされていた.

L.Bashlier (1900) Théorie de la spéculation という題の学位論文の中で，すでに Brown 運動の性質を使ったオプションの価格付けを議論している.

1.2　Brown 運動の数学的な定義

最初に確率空間を導入する．標本空間 Ω が与えられているものとする．Ω としてイメージするときはできるだけ大きな集合（例えば森羅万象全体）をイメージしておく方が都合がいい．しかし，数学として扱うときには必要最小限なものが都合がよい．とにかく Ω が標本空間として与えられているものとする．

定義 1.1（ σ-**加法族** ）
Ω の部分集合からなる集合族 $\mathcal{F}$ が Ω の σ-**加法族**であるとは，

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

の 3 つの条件を $\mathcal{F}$ がみたすときにいう．

標本空間の集合（これを**事象**とよぶ.）のうち，確率を測ることができる事象の全体が σ-加法族になっているものと考えることにより,（測度論的）確率論がはじまる．

定義 1.2（**確率測度** ）
Ω と，その σ-加法族 $\mathcal{F}$ が与えられているとき，$\mathcal{F}$ 上の実数値関数 P が,

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$0 \leq P(A) \leq 1$.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が，$n \neq m$ のとき $A_n \cap A_m = \emptyset$ を常に満たすならば,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad (\sigma-\text{加法性})$$

の 3 つの条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ 上の確率測度という．

組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**という．

定義 1.3 (**確率変数**)
写像 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ が，任意の 1 次元ボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \,;\, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \tag{1.1}$$

を満たすとき，**確率変数** という．X が $\mathbf{R}^d$ に値を取り，任意の d 次元ボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して (1.1) を満たすとき，d **次元確率変数**という．

定義 1.4 (**期待値**) 確率変数 X の**期待値** EX は次の 3 段階で定義する．

(i) X が有限個の値 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ しかとらない場合：

$$EX = \sum_{j=1}^{m} a_j P\left(X = a_j\right)$$

(ii) X が非負の値のみをとる場合：

$$EX = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n^2} \frac{j}{n} P\left(\frac{j}{n} \le X < \frac{j+1}{n}\right)$$

このとき，$EX < \infty$ ならば X は**可積分**という．

(iii) 一般の場合：

$X^+ = \max\{X, 0\}$,　$X^- = \max\{-X, 0\}$ とおくと $X^+, X^- \ge 0$ で $X = X^+ - X^-$ である．これに対して X^+, X^- がともに可積分ならば X は**可積分**であるといい、

$$EX = EX^+ - EX^-$$

によって定義する．

期待値 EX は積分と同じ性質を持つ．しばしば

$$EX = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

とも書かれる．事象 A の上での期待値 $E(X \,;\, A)$ は事象 A の指示関数

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{if} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

を使うと

$$E(X\ ;\ A) = \int_A X(\omega)P(d\omega) = E(X1_A)$$

と定義できる.

定義 1.5 (**確率過程**) $[0,\infty)$ の各実数 t に対して確率変数 $X(t)$ が与えられているとき，この確率変数の系 $\{X(t)\ ;\ t \in [0,\infty)\}$ を**確率過程**という.

定義 1.6 (Brown **運動**) $(\omega, \mathcal{F}, P)$ 上定義された確率過程 $\{B(t); t \in [0,\infty)\}$ が 1 次元 **Brown 運動**であるとは,

(i) $B(0) = 0 \quad almost \quad surely \quad$ ($a.s.$ と略記する)

(ii) $0 \le s < t$ のとき，$B(t) - B(s)$ は $\sigma\{B(u)\ ;\ u \in [0,s]\}$ と独立で，その分布は $N(0, t-s)$ (平均 0, 分散 $t-s$ のガウス分布)

の二つの条件を満たすときにいう. d 個の独立な 1 次元ブラウン運動 $\{B_j(t); t \in [0,\infty)\}\quad (j = 1,2,\ldots,d)$ に対して，$\{(B_1(t),\ldots,B_d(t))\ ;\ t \in [0,\infty)\}$ を d 次元 Brown 運動とよぶ.

1 次元 Brown 運動を単に $B(t)$ と書くとき，σ-加法族 $\sigma\{B(u)\ ;\ u \in [0,t]\}$ を $\mathcal{F}_t^B$ と書き，**自然なフィルトレーション**という．これは，時刻 t までの Brown 運動の軌跡によって得られる情報の全体である.

時刻 t までに得られるほかの情報を付け加えても，Brown 運動の先の動きは予測できないと思われる．そこで，一般に時刻 t までに得られる情報の全体を $\mathcal{F}_t$ と書くとき, (これも σ-加法族）上の Brown 運動の定義で $\mathcal{F}_t^B$ を $\mathcal{F}_t$ でおきかえて定義したものを $\mathcal{F}_t$-Brown 運動とよぶ.

$t \le s$ ならば, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ である. このような $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の系 $\{\mathcal{F}_t\ ;\ t \in [0,\infty)\}$ を一般に**フィルトレーション**とよぶ.

補題 1.1 (Chebyshev **の不等式**)
X が可積分な確率変数のとき，$p > 0$ に対して,

$$P\left(|X(\omega)| \ge \lambda\right) \le \frac{E\{|X|^p\}}{\lambda^p} \tag{1.2}$$

が成り立つ.

証明 $A=\{|X|\geq\lambda\}$ とおくと，

$$E\{|X|^p\}=\int_A|X|^pP(d\omega)\geq\int_A\lambda^pP(d\omega)=P(A)\lambda^p.$$

両辺を λ^p で割れば，(1.2) を得る．