第4章　Black-Sholes Model

4.1　モデルの説明とオプション

ある株価 S_t が次の確率微分方程式に従っているとしよう．

$$dS(t) = S(t)\left(\mu dt + \sigma dB(t)\right) \tag{4.1}$$

ただし $B(t)$ は Brown 運動とする．これを解くと

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma B(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\}$$

となる．これに対し，安全資産とよばれる銀行預金や国債などの価格 $S^0(t)$ は

$$S^0(t) = S^0(0)e^{rt} \tag{4.2}$$

で与えられる．これらを使った金融商品として，**オプション**（または**条件つき請求権**）と呼ばれるものがある．これらの商品には通常**満期** T が設定されている．

例 4.1　(i) (ヨーロピアンコールオプション)

権利行使価格 K **のヨーロピアンコールオプション**とは，将来の満期時点 T において上記の株（リスク資産）を価格 K （円）で買うことができる権利のことを言う．[1]

満期時に株価 $S(T)$ が K を超えていれば，すぐに株を K 円で買って，$S(T)$ 円で売ることができ，一方，株価が $S(T)$ 円を下回るときは，この権利を放棄すれば何も買わないことになり，どちらにしても損はしないので，このオプションには価値がある．満期時におけるこのオプションの価値は

$$\left(S(T) - K\right)_+ = \max\{S(T) - K, 0\}$$

となる．

(ii) (アメリカンコールオプション)

権利行使価格 K **のアメリカンコールオプション**とは，満期時 T までの将来のどの時点でも好きなときにこの株を K で買うことができる権利である．これも権利を行使しないことができるので，このオプションも価値がある．

[1] この権利は行使しないこともできるオプションつきであるためこう呼ばれている．

(iii) (アジアンコールオプション)

権利行使価格 K **のヨーロピアンコールオプション**とは，将来の満期時 T までの平均の株価が権利行使価格 K を超えているとき差額を儲けることができる．これに対する現実の株の売買はないが，オプションとしてはこのようなものも商品になりうる．

(iv) **プットオプション**

上記のコールオプションがいずれも株を買う権利であるのに対して，株を売る権利というのも考えられる．これがプットオプションである．この講義では詳しくは触れないが，ヨーロピアンプット、アメリカンプット、アジアンプットなどのオプションが考えられる．

金融工学における最初の大きな問題は，これらのオプションの価格をどのように決めるかということである．このことについての Black-Sholes の理論を紹介する．

4.2　許容戦略と資金自己調達戦略

株と安全資産を組み合わせて運用して行く戦略を考えよう．これは各時刻 t において株と安全資産をそれぞれどれだけずつ組み合わせて保有して行くか（どのような**ポートフォリオ**を組むか）を決めればよい．

時刻 t において安全資産を保有する量を $H^0(t)$，株を保有する量を $H(t)$ と表すことにする．このとき，時刻 t において保有する株と安産資産のあわせた価値は

$$V(t) = H^0(t)S^0(t) + H(t)S(t) \tag{4.3}$$

となる．

さて，オプションの価格を決めるためには，このオプションを売って得た資金を運用して満期が来たとき，オプションの権利を行使されてもそれに応えることができるような価格にする必要がある．つまり，契約時のこのオプションの価値はこのようにして運用によって満期時（またはオプション行使時）においてこのオプションと同じ価値を作ることができる金額と考えるのが妥当であろう．

そこで，運用するときの戦略として満たされるべき条件を列記してみる．

(i) 適合性：$(\mathcal{F}_t^B)$ を Brown 運動 $B(t)$ の自然なフィルとレーションとする．株価 $S(t)$ は $(\mathcal{F}_t^B)$-適合なので，ポートフォリオを組む戦略 $(H^0(t), H(t))$ も $(\mathcal{F}_t^B)$-適合である事が要求される．(時刻 t までの株価の推移しか戦略に使う事はできない．)

(ii) **self financing**: 最初にポートフォリオ $(H^0(0), H(0))$ を組んで時間 h の間これで運用すると，時刻 h において，このポートフォリオの価値は

$$V(h) = H^0 S^0(h) + H(0)S(h)$$

に変化する．資産の変化は

$$V(h) - V(0) = H^0(0)\left(S^0(h) - S^0(0)\right) + H(0)\left(S(h) - S(0)\right)$$

ここで，ポートフォリオを組み変えて $(H^0(h), H(h))$ とするが，このとき資金の流入も流出も無いようにする (self financing)，つまり

$$V(h) = H^0(h)S^0(h) + H(h)S(h)$$

とする．時刻 t で $(H^0(t), H(t))$ というポートフォリオで出発して h 後の時刻 $t+h$ における資産は

$$V(t+h) = V(t) + H^0(t)(S^0(t+h) - S^0(t)) + H(t)(S(t+h) - S(t))$$

シンボリックに書くと $h \to 0$ の極限では

$$dV(t) = H^0(t)dS^0(t) + H(t)dS(t)$$

となる．そこで，戦略 $(H^0(t), H(t)), t \geq 0$ が **self financing** とは，この戦略で運用した時の時刻 t での資産総額 $V(t)$ が

$$V(t) = V(0) + \int_0^t H^0(u)dS^0(u) + \int_0^t H(u)dS(u)$$

によって与えられる事を言う．われわれの考えるべき戦略が self financing でなければいけないのは当然である．

(iii) 上に現れた積分が意味があるためには

$$\int_0^T |H^0(t)|dt + \int_0^T H(t)^2 dt < \infty \tag{4.4}$$

が必要になる．現実問題としては $H^0(t), H(t)$ は有界と仮定しても良いだろうからこの条件は応用に際して問題は無い．

命題 4.1 $(H^0(t), H(t))$ を (4.2.4) を満たす $(\mathcal{F}_t^B)$-適合なな戦略とする．この戦略が *self financing* であることの必要かつ十分な条件は $V(t), S(t)$ の割引現在価値 $\tilde{V}(t) = e^{-rt}V(t), \tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ を使って

$$\tilde{V}(t) = V(0) + \int_0^t H(u)d\tilde{S}(u) \quad a.s. \tag{4.5}$$

となることである．

証明 $(H^0(t), H(t))$ が self financing な戦略だとすると，伊藤の公式により

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t) &= V(0) + \int_0^t -re^{-ru}V(u)du \\
&\quad + \int_0^t e^{-ru}H^0(u)dS^0(u) + \int_0^t e^{-ru}H(u)dS(u) \\
&= V(0) + \int_0^t (\mu - r)e^{-ru}H(u)S(u)du + \int_0^t \sigma e^{-ru}H(u)S(u)dB(u) \\
&= V(0) + \int_0^t H(u)d(e^{-ru}S(u))
\end{aligned}$$

逆に $(H^0(t), H(t))$ が (4.2.5) を満たすとするとやはり伊藤の公式により

$$\begin{aligned}
V(t) &= e^{rt}\tilde{V}(t) \\
&= V(0) + \int_0^t re^{ru}\tilde{V}(u)du + \int_0^t e^{ru}H(u)d\tilde{S}(u) \\
&= V(0) + \int_0^t rV(u)du + \int_0^t e^{ru}H(u)\left[(\mu - r)e^{-ru}S(u)du\right] \\
&\quad + \int_0^t e^{ru}H(u)e^{-ru}\sigma S(u)dB(u) \\
&= V(0) + \int_0^t H^0(u)dS^0(u) + \int_0^t \mu H(u)S(u)du + \int_0^t \sigma H(u)S(u)dB(u) \\
&= V(0) + \int_0^t H^0(u)dS^0(u) + \int_0^t H(u)dS(u)
\end{aligned}$$

となり self financing の式が出る．