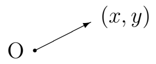
1　ベクトル

1.1　ベクトルと座標

ベクトル　いくつかの数を組にしたもの（順番も大事）
例 1：今月の家計簿
光熱費 30,000 住居費 100,000 交通費 15,000 食費 40,000 etc.
書きやすいように縦、または横に並べる
$(30000, 100000, 15000, 40000, \ldots)$

例 2：小テストの成績のエンマ帳
A 君 8 点 B 君 7 点 C 君 4 点 etc.
$(8, 7, 4, \ldots)$

2 個や 3 個の数の組なら、平面または空間の点として見る事もできる
ベクトル (x, y) に対して平面の原点から点 (x, y) に矢印をかき、
ベクトル (x, y) を平面上に表すと、矢印ベクトルが得られる。



ベクトルを一文字で表すと、書くときに便利。
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などと書く。詳しく表すときは

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{：横ベクトル} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{：縦ベクトル} \tag{2}$$

などと表す。縦ベクトルと横ベクトルで表し方（ボールド文字）は
変わらないが、横ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を縦に並べて書くときは

$${}^t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

とかき、区別する。縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ を横にするときも ${}^t\boldsymbol{b}$ と書いて区別

する。以下、紙面の都合上、横ベクトルを主に扱う。

ベクトルの成分
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ のとき、各 a_i をベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分という。縦ベクトルの時は上から順に第 1 成分、第 2 成分…と呼ぶ。
例: $\boldsymbol{a} = (3, 8)$ の第 1 成分は 3, 第 2 成分は 8

ベクトルの大きさ
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき、その大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

と定義する。($\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ なら $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ なら $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ と定義)

例: $\boldsymbol{a} = (2, 3, 4, 5, 6)$ の大きさは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4 + 9 + 16 + 25 + 36} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

すべての成分が 0 のベクトルを零ベクトル（0 ベクトル）といい, $\boldsymbol{0}$ で表わす。

1.2　ベクトルの和と差、スカラー倍、内積

ベクトルの和と差
ベクトルの成分の個数が n 個のとき n 次元ベクトルと呼ぶ。
二つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対しては 和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と、差 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ が次のように成分毎の演算で定義される。

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots, a_n \pm b_n)$$

（家計簿の計算と同じ）

スカラー[1]（実数）倍
n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と実数 r に対して $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の r 倍は成分毎に r 倍して定義する。

$$r\boldsymbol{a} = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$$

[1] この講義では実数の事をスカラーと呼ぶ。良く使われる呼称である

内積

二つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して、内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

と定義する。例えば二つの 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -5), \boldsymbol{b} = (-0.5, 0.3)$ の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \times (-0.5) + (-5) \times 0.3 = -2.5$$

である。

n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = |\boldsymbol{a}|^2$$

となる。

性質：定義から次は簡単に確かめられる。

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
3. $(c\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = c(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \quad c$ はスカラー
4. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

注意 1.1 余弦定理をつかうと、内積は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \cos\theta$ である事がわかる。興味のある人は確かめて見てください。（やり方が分からない人は聞いてください。ヒントを出します）

1.3 1次独立、1次従属

今後何回もでてくる重要な性質。

1次独立

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立とは

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば } x = y = 0$$

となるときにいう。

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立とは

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば } x = y = z = 0$$

となるときにいう。

一般に n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が**1次独立**とは

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \text{ ならば } c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

となるときにいう。

1次独立でないとき**1次従属**という。

例 1.1 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立である。

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{b} = (0, 1, 1), \quad \boldsymbol{c} = (1, 0, 1)$$

実際、

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

とすると、連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

が成り立たないといけない。これを解くと $x = y = z = 0$ となるので、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は *1* 次独立である。

練習 1.1 (i) n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について次の式を証明せよ。

(a) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$

(b) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

ヒント：内積の性質を使ってベクトルの大きさと内積を関係付ける事ができます。(内積の性質）

(ii) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立である事を確かめよ。

(iii) n 個の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が直交系を作るとき、つまり $i \neq j$ ならば $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$ となるとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である事を確かめよ。

練習 1.2 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次従属であることを確かめよ。

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{b} = (-1, 2, 0), \quad \boldsymbol{c} = (-1, 8, 2)$$