9 クラーメルの公式

9.1 クラーメルの公式の導出

再び未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

を解く事を考える。この式を縦ベクトル

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{と } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

を使って書くと

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c} \tag{1}$$

と書ける。行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ と表すとき、$\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{c}$ で置き換えた行列の行列式を考えると (1) より、

$$\begin{aligned} & |[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots \boldsymbol{a}_n]| \\ = & |[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]| \\ = & \sum_{i=1}^{n} x_i |[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]| \end{aligned}$$

$i \neq j$ のときは i 列目と j 列目に同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ が並ぶので、行列式の値が 0 になる。すなわち、

$$|[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]| = 0$$

また、$i = j$ のときは元の行列の行列式 $|A|$ がでてくる、つまり、

$$|[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]| = |A|$$

したがって、

$$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots \boldsymbol{a}_n]| = x_j|A|$$

がでてくる。$|A| \neq 0$ ならばこれより

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & c_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & c_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

という式を得て、連立方程式が解けている。この式をクラーメルの公式という。逆行列のときと同じように、この公式は連立方程式の解を表現するのには便利だが、実際に計算をするのには向かない。実際に解くときは掃き出し方によるほうがずっと速い。

9.2 クラーメルの公式と逆行列の公式

$|A| \neq 0$ のとき、方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

を解くと、クラーメルの公式から

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & 1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j}\frac{|\overline{A_{1j}}|}{|A|}$$

が $j = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つ。

上の連立方程式をベクトルで書いて、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{e}_1$$

ただし、

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_1$ のかわりに第 i 行のみ 1 で他は 0 の縦ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ として方程式

$$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

を考えると、クラーメルの公式から

$$x_j = \frac{|[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n]|}{|A|} = (-1)^{i+j}\frac{|\overline{A_{ij}}|}{|A|}$$

となっている。i に対する方程式 (1) の解を

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

とかく。つまり、

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$$

がそれぞれの i について成り立っているとすると、これを並べて書いて

$$\begin{aligned} & [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n][\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n] \\ = \ & [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n] = E_n \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$X = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n] = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

は A の逆行列である事が分かる。

クラーメルの公式からこのようにして逆行列の公式を導く事もできる。

練習 9.1 次の行列の行列式を計算し、それが正則な行列であるか否かを判定せよ。

$$(1)\, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

練習 9.2 次の行列の逆行列を求めよ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$