1 関数とその極限

1.1 関数の基本事項

関数、定義域、値域

実数の全体を $\mathbb{R}$ と書く。$\mathbb{R}$ の部分集合 D のそれぞれの要素（実数）x に対して一つの実数 y を対応させる対応の仕方

$$f : D \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}$$

が与えられている時、$y = f(x)$ と書き、D を関数 $f(x)$ の**定義域**といい、定義域 D から f によって写される集合

$$f(D) = \{y;\ \text{ある } x \in D \text{ に対して } y = f(x) \text{ となる }\}$$

を関数 f の**値域**という。

例 1.1 *1.* $y = x^2$ ただし $D = \{x : -\infty < x < \infty\}$. このとき定義域は $\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$ で値域は $\{x : 0 \leq x < \infty\}$.

2. $y = 1/x$ このとき $x = 0$ を除いて定義でき、定義域は $\{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 0\}$ の部分集合なら何でも良い。いま、定義域が $D = [0, \infty) = \{x : 0 \geq x < \infty\}$ とすると、値域は再び $D = [0, \infty) = \{x : 0 \geq x < \infty\}$ となる。

関数の平行移動

x-y 平面で、$y = 1/x$ と $y = 1/(x-1)$ のグラフを考える。これを $f(x) = 1/x, g(x) = 1/(x-1)$ と書くと、$g(x) = f(x-1)$ なので、$g(x)$ のグラフは $f(x)$ のグラフを右に 1 だけ平行移動したものになっている。一般に $y = f(x-a)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを右に a だけ平行移動したものになっている。

関数の合成

関数 f の定義域を D, 値域を $f(D)$ とし、関数 g の定義域を E, 値域を $g(E)$ とするとき、$f(D) \subset E$ ならば $g \circ f(x) = g(f(x))$ という新しい関数が定義でき、その定義域は D で、値域は

$$g(f(D)) = \{y : y = g(f(x)) \text{ となる } x \in D \text{ がある }\}$$

となる。$g \circ f$ を f と g の**合成関数**という。例えば $f(x) = x^2+1, -\infty < x < \infty$ で $g(x) = 1/x, x > 0$ ならば、合成関数

$$g \circ f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad -\infty < x < \infty$$

が定義できる。

逆関数

二つの関数を合成すると x 自身になる場合がある。たとえば、

$$f(x) = (x+1)^2, -1 \leq x < \infty$$

とするとき、$y = (x+1)^2$ だから $0 \leq x+1 = \sqrt{y}$ となり、$x = \sqrt{y} - 1$ である。x と y とを入れ換えた関数

$$g(x) = \sqrt{x} - 1, \quad 0 \leq x$$

を考えると、$g \circ f(x) = \sqrt{(x+1)^2} - 1 = x$ となる。

g を f の **逆関数**という。一般に、$y = f(x)$ となる x がどの y についても一つしかないとき y が決まれば x が決まるので $x = f^{-1}(y)$ と書き、この対応 f^{-1} を f の逆関数という。

グラフでいうと $y = f(x)$ は $x = f^{-1}(y)$ となり、x と y を入れ換えたグラフが $y = f^{-1}(x)$ だから、$y = f^{-1}(x)$ は $y = f(x)$ を $y = x$ に関して対称に折り返したグラフになっている。

三角関数

単位円 $x^2+y^2 = 1$ を考える。この円周上の点 (x, y) に対して原点 $\mathbf{O} = (0, 0)$ と (x, y) を結んだ線分と x-軸がなす角を θ とするとき

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

と表す。

ラジアン（弧度法）上の角度のはかり方を次のように変える。単位円上 $(1, 0)$ から出発して長さ L だけ進んだ時に (x, y) にいるとするとき、原点 $\mathbf{O} = (0, 0)$ と (x, y) を結んだ線分と x-軸がなす角を L と呼ぶことにする。このとき $\cos L = x, \quad \sin L = y$ となっている。角度は今後この様に測ることにする。（この方が便利だから）

角度を表す変数としては今まで通り θ, x, t などを用いる。

加法定理、倍角、半角の公式など

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

どちらか覚えてあとは違いを覚えておけばいい。

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (e \text{ はある正の数 } ; e = 2.1828\ldots)$$

を覚えておくと $i^2 = -1$ をつかって

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

で、左辺はオイラーの公式から

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

実部どうし、虚部どうしを比較すると加法定理の公式が出ている。

加法定理から $x = y$ とすると

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

という倍角の公式がでてくる。さらに、第一の式から $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を使って $\cos x^2, \sin^2 x$ について解くと

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

という半角の公式がでる。

指数関数、対数関数

$a > 0$ に対して

$$y = a^x$$

という関数を考えることができる。まず、$a^2, a^3, \ldots$ が考えられ、 $a^{1/2} = \sqrt{a},\ a^{1/3} = \sqrt[3]{a}, \ldots$ と $a^{1/n}$ の形が定義でき、有理数 $q = m/n$ に対し、

$$a^q = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

と定義すればよい。この値は $\sqrt[n]{a^m}$ と等しい。（両方とも正で、 n 乗すると a^m と等しい）これをグラフに描くと、一つの曲線が得られ、すべての $x \geq 0$ に対して a^x が定義できる。

$a^{-x} = 1/a^x$ によって $x < 0$ に対しても a^x が定義できる。

$a = 1$ のとき、常に $a^x = 1$ なので、この場合は除いておく。

$a > 1$ のとき a^x は単調増加で

$a < 1$ のとき a^x は単調減少である。

$a^x, a \neq 1$ を**指数関数**という。

$a, b > 0, a \neq 1$ として、

$$a^x = b$$

となる x は唯一つしかなく、この値を $x = \log_a b$ と書き、b を真数、a を底とする対数という。

関数の言葉でいうと、 指数関数 $f(x) = a^x$ は逆関数として**対数関数** $f^{-1}(x) = \log_a x$ を持つということになる。

実際、$x > 0$ のとき $a^{\log_a x} = x$ が対数の定義からでてくる。

また、 $\log_a a^x = b$ とかくと $a^b = a^x$ なので、$b = x$ である。つまり

$$\log_a a^x = x$$

となる。

関数の極限 $\lim_{x \to a} f(x)$

例 1.2 $f(x) = x^2, \quad (-\infty < x < \infty)$ について考えてみる。

a が有限の時を考える。 x が a に近づく時、 $h = x - a$ はゼロに近づき、

$$f(x) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = a^2 + h \cdot (2a + h)$$

なので、h がかかっている項はゼロに近づく。したがって、$f(x)$ は $a^2 = f(a)$ に近づいている。

$x \to \infty$ のとき x は限りなく大きくなるので x^2 はますます限りなく大きくなり、これを

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

と表す。$y = f(x) = x^2$ のグラフは左右対称なので、$x \to -\infty$ のときも限りなく大きくなる。つまり、

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$

となる。

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限は、$x = a$ で分母がゼロにならないときはだいたい $f(a)$ に近づく（連続関数はこの性質で定義される）

注意 1.1 もちろん、 $f(x)$ が a で定義されていない場合もある。それでも $\lim_{x \to a} f(x)$ を考える事ができることもある。たとえば、$x \neq a$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

と定義すれば、$x \neq a$ のとき約分できて $f(x) = x + a$ となるから、

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2a$$

と極限がある事がわかる。

練習 1.1 次の対応表を完成せよ (360° は 2π に対応)

度 (°)	30	45	60	90	105	180
ラジアン						

練習 1.2 (教科書 p.23 問 1.20) 次の計算をせよ

(1) $a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{5}{6}}$ (2) $(a^{-2}b)^{-3}$ (3) $(a^{\frac{1}{3}})^2 \times (a^{\frac{1}{2}})^{-3}$

練習 1.3 (教科書 p.28 練習問題 1.6) 関数 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+k}$ の逆関数が $f(x)$ と一致するように定数 k の値を定めよ。

練習 1.4 つぎの極限を計算せよ

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2}(x^2 + 4)$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} 2^x$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$