

## 2 関数の極限 (続き)

**定義 2.1**  $x$  が  $a$  に限りなく近づくことを  $x \rightarrow a$  と書く。

関数  $f(x)$  が  $x \rightarrow a$  のとき、限りなく  $A$  に近づくとき、

“ $x \rightarrow a$  のとき  $f(x) \rightarrow A$ ”

といい、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

と書く。

例でも示したが、 $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のときも極限を考えることができる。この極限を

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

と書く。

**定理 2.1** (教科書 p.49 定理 3.1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  のとき

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c\alpha$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$  ただし、 $\beta \neq 0$

(5)  $f(x) \leq g(x)$  がつねに成り立つならば  $\alpha \leq \beta$

[4] は  $\beta = 0$  のときは使えないが、これに加えて  $\alpha = 0$  となるときは極限がある場合がある。例えば、分母分子が共通の因数  $(x - a)$  をもち、分母分子をそれぞれこの共通因数で割ることにより極限が計算できることがある。

**例 2.1** (教科書 p.49, 問 3.4(1))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 6}{x + 3} = -2$$

**例 2.2** (教科書 p.50, 例 3.3(1))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

[解説]  $1/x$  は  $x \rightarrow \infty$  のとき、どんな正の数よりも小さくなる。だから極限はもっと小さい。しかし  $0$  よりも小さくない。

**例 2.3** (教科書 p.51 例題 3.4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x^2} - x = 0$$

なぜなら、分子を有理化すると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = 0$$

**例 2.4**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x + 1/x^3}{1 + 2/x - 1/x^2 + 1/x^3} = 0$$

この例では分母分子が無限大に行くが、分母の方が大きくなり方がはるかに早い ( $x^3$  と  $x^2$  の無限大への発散のオーダーの違い)

極限を計算するときによく使う計算方法がある。次の「はさみうちの原理」がその代表である。

**定理 2.2** (教科書 p.53 定理 3.2)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$  のとき、 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  ならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

**例 2.5** (教科書 p.54 例 3.6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

なぜなら、 $-1 \leq \sin x \leq 1$  だから  $x > 0$  でわって

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$x \rightarrow \infty$  のとき  $1/x \rightarrow 0$  だったので、上式の左辺と右辺はともに  $0$  に近づく (収束する)。よって、はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

**例 2.6**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

なぜなら、(ラジアンを使って) 面積を比較することにより

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

両辺を  $2$  倍して  $x > 0$  でわると

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}$$

整理して

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \quad (\text{右側の不等式から})$$

および

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad (\text{左側の不等式から})$$

まとめて

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$x > 0, x \rightarrow 0$  のとき、 $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$  だから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ところが、 $\frac{\sin x}{x}$  は偶関数なので、

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

も成り立ち、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  がわかる。

例 2.6 により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

がわかったので、これを使うと次のようなことも分かる

例 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

なぜなら、 $x \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2}$$

と計算できる。

連続関数

定義 2.2 関数  $f(x)$  が  $a$  で連続であるとは、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つときにいう。

定義 2.3 関数  $f(x)$  が区間  $(a, b)$  で連続であるとは、 $a < c < b$  となる任意の点  $c$  において連続となるときにいう。

注意 2.1 端の点  $a, b$  での連続性は、 $x$  が  $[a, b]$  の中から  $a$  または  $b$  に限りなく近づくとときに  $f(x) \rightarrow f(a)$  または  $f(x) \rightarrow f(b)$  となることをいう。

練習 2.1 (教科書 p.51 問 3.6) 次の極限を調べよ

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2-1}}{3x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

練習 2.2 次の極限を調べよ

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$