3 微分係数、導関数

微分係数

関数 $y=f(x)$ を $a \le x \le b$ で考える。関数 $f(x)$ の変わり方の目安として、区間 $[a,b]$ での $f(x)$ の**平均変化率**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が考えられる。これは二点 $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を通る直線の傾きを表している。b をどんどん a に近づけて行くと、この傾きはグラフ $y=f(x)$ の点 $(a,f(a))$ での接線の傾きに近づいて行く様に見える。$b<a$ のとき区間 $[b,a]$ で考えても平均変化率の形はおなじで、$b\to a$ のとき $(a,f(a))$ での接線の傾きに近づいて行く様に見える。

定義 3.1 $x\to a$ のとき、極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

があれば、関数 $f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるといい、この極限の値を $f'(a)$ または $\frac{df}{dx}(a)$ とかき、$f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** という。

定義 3.2 $f(x)$ が、区間 $[a,b]$ 内のどの点においても微分可能なとき、$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で微分可能であるといい、任意の $[a,b]$ 内の点 x に対して、x での微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の **導関数** といい、 $f'(x)$ または $\frac{df}{dx}(x)$ で表す。

定理 3.1 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、$x=a$ で連続である。

証明

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

を示せば良い。$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なので、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))}{x-a}\cdot(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

□

微分法の公式

次の定理は、導関数を求めるのに便利である。

定理 3.2 (教科書 定理 3.6 ∼ 3.8) $f(x),g(x)$ が区間 $[a,b]$ で微分可能な関数とするとき、導関数について以下のことが成り立つ。

(1) c を定数とするとき、 $(cf(x))'=cf'(x)$,

(2) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$, $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$,

(3) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (**積の微分公式**)

(4) $g(x)\neq 0$ となるところで

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{(商の微分公式)}$$

証明 定義にしたがって計算すればいい。点 x での微分を考えるので、ちょっとずらした $x+h$ と x の間の平均変化率を考え、$h\to 0$ のときの極限を考える。

(1)

$$\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to cf'(x)$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}\\ =\ &\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ =\ &\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ \to\ &f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

(3) 最初に、

$$\begin{aligned}f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=&f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)\\ &+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\end{aligned}$$

と変形しておく。(間に $f(x)g(x+h)$ を足して引いただけ。)右辺は前二つ、後ろ二つをまとめると

$$[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]$$

とできる。こうしておいて、 $f(x)g(x)$ の微分を計算しよう。

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =\ &\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =\ &\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ =\ &\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ \to\ &f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

(4) ここでは積の微分の公式を使って証明しよう。
$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とかくと、

$$h(x)g(x) = f(x)$$

だから、これを微分すると、積の微分の公式から

$$h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = f'(x)$$

移項して

$$h'(x)g(x) = f'(x) - h(x)g'(x) = f'(x) - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}$$

したがって $g(x)$ で両辺をわると

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を得る。

□

例 3.1 $n \geq 1$ が自然数のとき、

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

であることを数学的帰納法で証明しよう。$n = 1$ のときは $x' = 1$ なのでこの式は正しい。n のとき正しいとして、積の微分の公式より

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$$

したがって、 $n+1$ でも正しい。

例 3.2 上の式はすべての整数 n に対して正しいことを示そう。$x^0 = 1$ なのでこれを微分すると 0 になり、上の式は $n = 0$ でも正しい。また、自然数 n に対して

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

なので、商の微分の公式から

$$(x^{-n})' = \frac{0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

となり、確かにこのときも成り立っている。

例 3.3 (三角関数の微分)
前回勉強した

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を使うと三角関数の微分が計算できる。まず、差積公式

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x &= \sin\bigl((x + h/2) + h/2\bigr) - \sin\bigl((x + h/2) - h/2\bigr) \\ &= 2\cos(x + h/2)\sin(h/2)\end{aligned}$$

により

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\cos(x + h/2)\frac{\sin h/2}{h} = \cos(x + h/2)\frac{\sin h/2}{h/2}$$

なので、右辺は $\cos x$ に近づく。ゆえに、

$$(\sin x)' = \cos x$$

練習 3.1 (教科書 p.65 問 3.18 (3), (5))
次の関数の導関数を求めよ。
(1) $f(x) = (x^3 - 4)(x^2 + 2)$　　(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$,　$(x \neq \dfrac{3}{2})$

練習 3.2 差積公式より、

$$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin(x + h/2)\sin(h/2)$$

であるので、これを用いて上と同じようにして

$$(\cos x)' = -\sin x$$

を証明せよ。また、 $\sin x, \cos x$ の微分がそれぞれ $\cos x, -\sin x$ となることを用いて

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

を証明せよ。