6 Taylor の定理

このテーマは大学で始めて学ぶ。数 III や数 C では習わないことなので、理解が大切。

定理 6.1 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で $n-1$ 回微分可能で、$n-1$ 次導関数が連続であり、さらに開区間 (a,b) では n 回微分可能とすると、$a \le x \le b$ に対して $a<c<b$ となる c で

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c) \tag{2}$$

が成り立つ。ただし、$f^{(n)}(x)$ は f の n 次導関数。

a を b に代えても良い。このとき c の値は少し変わる。ただし、$a<c<b$ の関係は変わらない。

証明 $n=2$ のときでも十分面倒臭いので、このときだけ証明しておく。一般の n についても同じ方法が使える。

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

とおくと、$g(a)=0, g(b)=0$ で、g は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能なので、Rolle の定理により、$a<c<b$ となる c で $g'(c)=0$ となるものがある。

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - 2\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

だから $g'(c)=0$ は

$$(b-c)f''(c) = 2\frac{(b-c)}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

両辺を $2(b-c)/(b-a)^2 \ne 0$ でわると

$$\frac{(b-a)^2}{2}f''(c) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)$$

移項して、

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

b を x に置き換えて

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(c)$$

□

例 6.1 $f(x)=e^x$ は微分可能で、$f'(x)=e^x=f(x)$ なので、$f^{(n)}(x)=e^x$ が任意の $n \ge 0$ について成り立つ。したがって、 Taylor の定理を $n=3$ で $a=0$ として使うと、($x=0$ で 3 次まで Taylor 展開するという)
$f'(0)=\ldots=f^{(3)}(0)=1$ だから

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}e^c \quad (0<c<x)$$

上式の最後の項は $x>0$ のとき 0 以上なので、

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

これより $x>0$ のとき

$$xe^{-x} < (1+x)e^{-x} \le \frac{1+x}{1+x+x^2/2} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

$n=4$ で Taylor の定理をつかうと上と同じ議論で

$$x^2e^{-x} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

もわかる。

例 6.2 上の計算を形式的に無限に続けると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

という式を得る。この式は正しいことが知られている。e^x の 「$x=0$ での Taylor 展開」と呼ばれる。または Maclaurin 展開ともいう。($x=0$ での展開に限る)

同じように

$$f(x) = \sin x$$

とすると、$f'(x)=\cos x$ なので、$f''(x) = -\sin x = -f(x)$ これから何回も微分が出来て

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$

がわかり、Taylor の定理で $n \to \infty$ とすると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

がわかる。また、これを形式的に微分して

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

も得る。これも正しいことが知られている。

例 6.3 対数関数 $f(x) = \log x$ は x が小さいときやはり $x = 1$ で

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$$

と Taylor 展開できることが知られている。

実際に高次の項まで Taylor の定理を実行するのはなかなか難しい。$n = 2$ くらいで使うことが多い。

練習 6.1 (教科書 p.109, 練習問題 3.13 (1),(2))
次の関数を与えられた点のまわりで Taylor 展開せよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x+2}$ ($x = 2$、2 次の項まで)

(2) $f(x) = x\cos \pi x$ ($x = 1$、3 次の項まで)

練習 6.2 $f(x) = \sin x$ を $x = \pi/4$ のまわりで 3 次まで Taylor 展開せよ。

補足: 指数関数、多項式、対数関数

前回の問題でもでてきたが、$f(x) = x^2e^{-x}$ は $n \to \infty$ のときに、0 に収束しそうだが、どうやったらそのことを証明できるだろうか？似たような問題に

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^n}{t} = 0$$

がある。これは上の問題で $x = \log t$ と書き換えただけの問題である。いろいろな証明方法があるが、微分を使う自然と思われる証明に次のものがある。

任意の自然数 $N \geq 1$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} x^N e^{-x} = 0$$

である。

これを示すのに、次をまず示す。

$$x^{N+1}e^{-x} \leq A_{N+1}$$

が $x \geq 0$ で常に成り立つように定数 A_{N+1} がとれる。言い替えれば、関数 $f(x) = x^{N+1}e^{-x}$ は $x > 0$ のとき最大値を持つ。(この最大値を A_{N+1} と書いている。)

この証明は増減表を書けば明らかになる。実際、

$$f'(x) = \left[(N+1)x^N - x^{N+1}\right]e^{-x} = x^N(N+1-x)e^{-x}$$

となるので、$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$N+1$	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	極小	↗	極大	↘

増減表から明らかに

$$0 < x^{N+1}e^{-x} < (N+1)^{N+1}e^{-(N+1)} := A_{N+1}$$

がわかる。

さて、この式がでたら、両辺を $x > 0$ でわると、$x > 0$ のとき

$$0 < x^N e^{-x} \leq A_{N+1}x^{-1}$$

右辺は $x \to \infty$ のとき、0 に収束し、はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} x^N e^{-x} = 0$$

がわかる。

指数関数は x^N よりも強い！

$x = \log y$ とかくと、$e^{-x} = 1/y$ なので、

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(\log y)^N}{y} = 0$$

となる。

x は $(\log x)^N$ よりも強い

ということも分かる。似たような話に、

$$\lim_{x\to 0} x(\log x)^N = 0$$

がある。これも同じように証明できる。$y = 1/x$ と書き直すと

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(-\log y)^N}{y} = 0$$

となるからである。