8　置換積分

合成関数の微分を逆にたどる。不定積分でも定積分ででも計算のやり方は同じなので、定積分で公式を示しておく。

定理 8.1 関数 $t(x)$ が微分可能で、$t(c)=a<t(d)=b$ とするとき、連続な関数 $f(t)$ に対して、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(t(x))t'(x)dx$$

証明　$F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とするとき、$h(x)=F(t(x))$ を微分すると、

$$h'(x) = F'(t(x))t'(x) = f(t(x))t'(x)$$

だから、これを x について c から d まで積分すると、

$$h(c)-h(d) = \int_c^d f(t(x))t'(x)\,dx$$

であるが、左辺は $F(t(d))-F(t(c))=F(b)-F(a)$ と等しいので、定積分で書いて、

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(t(x))t'(x)\,dx$$

が成り立つ。 □

計算のやりかた 普通は左辺の計算にうまい 変数の取り換え $t=t(x)$ をつかって

$$f(t)\,dt = f(t)\frac{dt}{dx}\,dx$$

と形式的に書いておいて、$t=t(x)$ を代入する。あとはこれを x について積分すれば良い。

例 8.1

$$\int_0^1 e^{3x+2}dx$$

を計算する。$u=3x+2$ とすると、この式を u で微分して $1=3dx/du$ である。また、x が 0 から 1 まで動くとき u は 2 から 5 まで動き、

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x+2}\,dx &= \int_2^5 e^t\frac{dx}{du}\,du = \frac{1}{3}\int_2^5 e^t\,du \\ &= \frac{1}{3}\big[e^t\big]_2^5 = \frac{e^5-e^2}{3}\end{aligned}$$

逆に、右側の式が見えている場合がある、

例 8.2

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

を計算する。$t(x)=x^2+x+1$ とおくと、$t'(x)=2x+1$ だから、

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{t'(x)}{t(x)}\,dx$$

$t(0)=1, t(1)=3$ だから、$f(t)=1/t$ に対して上の公式が使えて、

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \log 3$$

と計算できる。

例 8.3 (教科書 p.124, 例題 4.4) これは不定積分の場合の例
(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}dx &= \int t\frac{dt}{dx}dx \quad (t=\log x \text{ と変数変換}) \\ &= \int \frac{1}{t}\,dt = \frac{t^2}{2}+C \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C\end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{x^2}{(2x-1)^2}\,dx$$

を計算する。 $t=(2x-1)$ とおくと、$x=(t+1)/2$ なので $dx/dt=1/2$ だから、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(2x-1)^2}\,dx &= \int \frac{(t+1)^2}{4t^2}\frac{dx}{dt}dt \\ &= \frac{1}{8}\int\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{8}\left(t+2\log|t|-\frac{1}{t}\right)+C \\ &= \frac{1}{8}\left((2x-1)+2\log|2x-1|-\frac{1}{2x-1}\right)+C\end{aligned}$$

例 8.4 (教科書 p.127 例題 4.7, (2))

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

を求める。$x=\tan t$ とおく。$\tan 0=0, \tan\frac{\pi}{4}=1$ なので、

$$\frac{dx}{dt} = (\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$$

だから、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{\pi}{4}$$

例 8.5 (部分分数展開)

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$$

を求めてみる。

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

となる a, b, c をもとめると、右辺を通分して

$$\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a(1+x^2)+(1+x)(bx+c)}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{(a+c)+(b+c)x+(a+b)x^2}{(1+x)(1+x^2)}$$

右辺と $1/(1+x)(1+x^2)$ が等しいのだから係数を比較して

$$a = 1-c, \quad b = -c, \quad a = -b$$

これを解いて $a = c = 1/2, b = -1/2$ となるので、

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right)$$

ところで、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$$

また、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt\end{aligned}$$

右辺第一式では $x = \tan t$ と置換積分して、第 2 項では $t = 1+x^2(\frac{dt}{dx} = 2x)$ と置換積分している。ゆえに、

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

となり、

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

例 8.6 (三角関数の積分の必殺技) $\tan(x/2) = 1$ とおく。例えば、

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx$$

を計算するとき、 $\tan(x/2) = t$ とおくと、$0 \le t \le 1$ で、

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2t\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}$$

および、$\tan(x/2) = t$ の両辺を t で微分して、

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(x/2)}\cdot\frac{dx}{dt} = 1$$

ここで、

$$\frac{1}{\cos^2(x/2)} = 1+t^2$$

に注意すると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

がわかり、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{dx}{dt}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \\ &= 2\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 \\ &= 2(1-\frac{1}{2}) = 1\end{aligned}$$

この計算は逆三角関数を知っていると便利だが、やや範囲外になる。

練習 8.1 ( ) 内の置換によって次の不定積分を計算せよ

(1) $\int (3x+1)^{10}\,dx \quad [t = 3x+1]$

(2) $\int \sin^4 x\cos x\,dx \quad [t = \sin x]$

(3) $\int xe^{-x^2}\,dx \quad [t = e^{-x^2}]$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx \quad [t = 2-x^2]$

練習 8.2 次の不定積分を求めよ

(1) $\int \sin x e^{\cos x}\,dx$

(2) $\int x\sqrt{x-2}\,dx$