9　部分積分

定理 9.1 (不定積分の部分積分の公式) 教科書 p.128 定理 4.8 $F'(x) = f(x)$ とするとき、

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

証明　積の微分公式を $F(x)g(x)$ に対して用いると、

$$\{F(x)g(x)\}' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

となるので、右辺の不定積分は $F(x)g(x) + C$ となる。したがって、

$$F(x)g(x) + C = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

となり、移項して

$$intf(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C$$

定数 C は不定積分 $\int F(x)g'(x)\,dx$ に入れてしまってよいので、

$$intf(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

と書ける。 □

例 9.1 教科書 p.129 問 4.13 (1) および例題 4.8 (2)

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ を計算する。

$(-\cos x)' = \sin x$ だから、上で $f(x) = \sin x, g(x) = x$ とおくと

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

(2) $x > 0$ として、$\displaystyle\int \log x\,dx$ を計算する。

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + C$$

定理 9.2 (定積分の部分積分) 教科書 p.130 定理 4.9

$F'(x) = f(x)$ のとき、

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

証明　積の微分公式から

$$\{F(x)g(x)\}' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

から、

$$\begin{aligned}[F(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (f(x)g(x) + F(x)g'(x))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

あとはこれを移項すれば良い。 □

例 9.2　(1) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$ を求める。

もちろん、半角の公式

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

を使っても計算できるが、部分積分を使ってみる。

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx &= \int_0^\pi \cos x\cdot\cos x\,dx \\ &= [\sin x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\cdot(-\sin x)\,dx = \int_0^\pi (\sin^2 x)\,dx\end{aligned}$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ だから、

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)dx = \pi - \int_0^\pi \cos^2 x\,dx$$

移項して

$$2\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \pi$$

したがって

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos^n x\,dx$ を求める。

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^\pi \cos^n\ dx = \int_0^\pi \cos x\cdot\cos^{n-1} x\,dx \\ &= \left[\sin x\cos^{n-1} x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin^2 x)\,dx \\ &= (n-1)\int_0^\pi \cos^{n-2}\sin^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^\pi \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)I_n\end{aligned}$$

移項して

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \therefore I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

となり、

$$I_0 = \int_0^\pi dx = \pi, \quad I_1 = \int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = 0$$

だから、

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 \\ &= \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}\pi \\ I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる。

10 積分の応用：体積、表面積の計算

立体をある方向 (x 方向としよう) に直交する平面で切った時の切口の周の長さや $b(x)$ や断面積 $S(x)$ が分かると、この立体の表面積 A や体積 V が

$$A = \int_0^h b(x) \, dx, \quad V = \int_0^h S(x) \, dx$$

で求められる。（もちろん $S(x), b(x)$ が連続などの良い性質を持つ必要はあるが）ここで、h はこの立体の左端の x-座標を 0 とした時の立体の右端の x-座標を表す。

例 10.1 (回転体の体積、表面積) $y = f(x),\ a \le x \le b$ を x-軸の回りに回転して出来る図形の表面積 A と体積 V は

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \, dx, \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

y 軸の回りに回転する時は $x = f^{-1}(y)$ と書き直してから計算する。

(1) 三角錐の体積底面積 S 高さ h の三角錐の体積を求める。高さ x の時の切口の面積は相似性から $(x/h)^2 S$ だから、

$$V = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} S \, dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{hS}{3}$$

(2) $y = x^{-1/3},\ 0 < x < 1$ を x-軸の回りに回転して得られる図形の体積は

$$V = \pi \int_0^1 x^{-2/3} \, dx = \pi \left[\frac{1-\frac{2}{3}}{x}^{1/3} \right]_0^1 = 3\pi$$

および 表面積は

$$A = 2\pi \int_0^1 x^{-1/3} \, dx = \pi \left[\frac{1-\frac{1}{3}}{x}^{2/3} \right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi$$

となる。

練習 10.1 次の不定積分を計算せよ

(1) $\int x^4 e^x \, dx$

(2) $\int x^2 \sin x \, dx$

(3) $\int \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}$ （これは部分積分ではなく、部分分数展開の問題です。）

練習 10.2 (1) 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を x 軸の回りに回転させて出来る立体の体積を求めよ。

(2) この立体を $-a/2 \le x \le a/2$ で切り取った樽型の立体の体積を求めよ。(樽の体積の求め方：オイラーによる方法)