14 極値問題

2 変数関数 $f(x,y)$ の極値問題を考えよう。まず、$f(x_0,y_0)$ が (x_0,y_0) の近くで極大になっているとすると、$y=y_0$ をとめて x だけの関数と見ても極大値になっているので、x で偏微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$$

となる。同じように $x=x_0$ でとめて y で偏微分しても

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

が分かる。極小値のときも同じ。したがって次の定理を得る。

定理 14.1 関数 $f(x,y)$ が偏微分可能で、(x_0,y_0) で極値をもてば

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= 0\end{aligned}$$

ただし、たとえば $f(x,y)=x^2-y^2$ を考えてみると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y$$

なので、$(0,0)$ では $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ が成り立っているが、x 軸に沿ってみると $f(x,0)=x^2$ なので、$(0,0)$ は極小だが、y 軸に沿って見ると $f(0,y)=-y^2$ となり、$(0,0)$ は極大。つまり、$(0,0)$ のどんな近くでも $f(0,0)=0$ よりも大きい値もあり、小さい値もあるので、$f(0,0)$ は極大でも極小でもない。この様な場合もあり、$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ だからといってかならずしも $f(x_0,y_0)$ が極値を取るとは限らない。

では、極値かどうかは判定できないのかと言うと、そうでもない。やはり一変数の時のように 2 階微分を見る事になる。

定理 14.2 $f(x,y)$ が 2 次の連続な偏導関数をすべてもち、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

が成り立っているものとする。このとき、

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{yy}(x_0,y_0),\ C=f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

と書く時、

(1) $AB>C^2$ かつ $A>0$ ならば $f(x_0,y_0)$ は極小値

(2) $AB>C^2$ かつ $A<0$ ならば $f(x_0,y_0)$ は極大値

(3) $AB<C^2$ ならば、極値はとらない。

証明 とにかく、(x_0,y_0) の近くで $f(x,y)$ の値と $f(x_0,y_0)$ の値を比較する。後の計算を簡単にするため、 (x,y) と書かずに (x_0+h,y_0+k) と書いて、

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

を考える。 Taylor の定理により、 (c_1,c_2) が (x_0+h,y_0+k) と (x_0,y_0) の間にとれて、

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}h^2f_{xx}(c_1,c_2)+hkf_{xy}(c_1,c_2)\\ &\quad +\frac{1}{2}k^2f_{yy}(c_1,c_2)\end{aligned}$$

となる。 $A'=f_{xx}(c_1,c_2),\ B'=f_{yy}(c_1,c_2),\ C'=f_{xy}(c_1,c_2)$ とかくと、$A'\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}\left(A'h^2+2C'hk+B'k^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{A'\left(h+\frac{C'}{A'}k\right)^2+\frac{A'B'-C'^2}{A'}k^2\right\}\end{aligned}$$

したがって、$A'>0,\ A'B'-C'^2>0$ ならば、上式の右辺は正になるので、$f(x_0+h,y_0+k)\geq f(x_0,y_0)$. いま、$f$ の 2 階微分の連続性を仮定しているので、(x_0,y_0) の十分近くでは A',B',C' はそれぞれ A,B,C にいくらでも近いので、

$$A>0, AB-C^2>0 \quad のとき \quad A'B'>C'^2, A'>0$$

として良い。したがって、このとき

$$f(x_0+h,y_0+k)\geq f(x_0,y_0)$$

が (x_0,y_0) の近くでは常に成り立ち、$f(x_0,y_0)$ は極小値であることが分かる。

$A<0,\ AB-C^2>0$ のときは (x_0,y_0) の十分近くでは、$A'>0,\ A'B'-C'^2>0$ となるので、逆に

$$f(x_0+h,y_0+k)\leq f(x_0,y_0)$$

となり、$f(x_0,y_0)$ は極大値になる。

$A>0,\ AB-C^2<0$ のとき、$h=-kC/A$ にそって $h,k\to 0$ とすると、$f(x_0+h,y_0+k)\leq f(x_0,y_0)$ だが、$k=0$ に沿って近づくと $f(x_0+h,y_0+k)\geq f(x_0,y_0)$ となる。$A<0$ だと、大小関係は逆になるが、どちらにしろ $f(x_0,y_0)$

は極値にならない。$A=0, AB-C^2<0$ のときは $C\neq 0$ なので、$A'\neq 0$ ならば上と同じ議論で、$f(x_0,y_0)$ は極値にならない。$A'=0$ のときは

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=2C'hk+B'k^2$$

も正にも負にもなる近づき方がある。したがって、この時も $f(x_0,y_0)$ は極値にならない。

□

例 14.1 (教科書 p.193 例題 5.10)
$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の極値を求める。
極値をとり得る点は $f_x=0, f_y=0$ をみたすので、

$$f_x=3x^2-3y=0,\quad f_y=3y^2-3x=0$$

の連立方程式の解になっている。これを解くと、$y=x^2=y^4$ となり、

$$y(1-y^3)=0$$

となり、 $y=0,1$ これを連立方程式に代入して $(x,y)=(0,0),(1,1)$ の二つが f が極値をとる点の候補。

$$f_{xx}=6x,\ f_{xy}=-3,\ f_{yy}=6y$$

なので、$(0,0)$ では

$$f_{xx}(0,0)=0,\ f_{xy}(0,0)=-3,\ f_{yy}(0,0)=0$$

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=-9<0$$

となり、この点で極値は取らない。
$(1,1)$ では、

$$f_{xx}(1,1)=6,\ f_{xy}=-3,\ f_{yy}=6$$

だから、

$$f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1)-\left(f_{xy}\right)^2=36-9>0$$

となり、$f(1,1)$ が極小値をとることがわかる。

例 14.2 (教科書 p.194 問 5.15 (3)) $0<x<2\pi, 0<y<2\pi$ のとき、$f(x,y)=\sin x+\cos y$ の極値を求める。$f_x=\cos x, f_y=-\sin y$ なので、極値を取り得るのは $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}, y=\pi$ のとき、つまり、$(x,y)=(\frac{\pi}{2},\pi),(\frac{3\pi}{2},\pi)$ のとき。
$f_{xx}=-\sin x,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=-\cos y$ だから、点 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ では

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2},\pi)f_{yy}(\frac{\pi}{2},\pi)-f_{xy}(\frac{\pi}{2},\pi)^2=-1<0$$

なので極値は取らない。
点 $(\frac{3\pi}{2},\pi)$ では

$$f_{xx}(\frac{3\pi}{2},\pi)f_{yy}(\frac{3\pi}{2},\pi)-f_{xy}(\frac{3\pi}{2},\pi)^2=1>0$$

なので、$f_{xx}(\frac{3\pi}{2},\pi)=1>0$ とあわせて、ここでは極小値 -2 を取る。

練習 14.1 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+6x+3$

(2) $f(x,y)=x^2+y^4$

(3) $f(x,y)=e^{-3x^2-y^2}$