10 月 7 日分 練習の解答

練習 1.1 (i) (a)

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

ここで内積の性質から普通に展開する事ができ、

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

右辺は $|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$ となる。

同じ計算を $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ に対してやると、

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$$

を得る。従って和をとると内積の部分がキャンセルして

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$$

となる。

(b) 今度は上で求めた二つの式の差をとれば良いので、

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

(ii) 実数 c_1, c_2 が

$$c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

をみたしているとする。このとき、$\boldsymbol{a}$ とこの式の両辺との内積をとると、

$$(c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = 0$$

内積の性質の 4 により左辺を展開して、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ をつかうと、

$$c_1|\boldsymbol{a}|^2+c_2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = c_1|\boldsymbol{a}|^2 = 0$$

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定しているので、その大きさは 0 ではない。したがって、上の式の最後の等式を $|\boldsymbol{a}|^2$ でわると $c_1=0$。最初の式にこれを代入すると

$$c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となるが、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ なので、この式は $c_2=0$ でなければ成り立たない。以上より $c_1=c_2=0$ でなければ成らない事がわかり、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立となる。

(iii) 上のやり方で、すこし見方を変えて、

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{1.1}$$

が成り立っているとき、任意の番号 i に対して $c_i=0$ と成っている事を言えば良いと考える。最初に i を任意に指定する。この i に対して (1.1) 式の両辺と $\boldsymbol{a}_i$ との内積をとると、

$$c_1\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_i+c_2\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_i+\ldots+c_n\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}_i = 0$$

$j \neq i$ のときは仮定から $\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_i = 0$ だから左辺で残るのは $c_i|\boldsymbol{a}_i|^2$ のみ。 $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ だから $|\boldsymbol{a}_i|^2 \neq 0$ でわると、$c_i = 0$ となる。i は任意にとったから、これは $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ である事を示している。

講評

(i) は良くできていました。(ii) もまずまず良くできていました。(iii) ですが、$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ が1次独立なことを (ii) を使って示し、だから全体の $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_n$ が1次独立だと結論した人がかなり居ました。いいですねぇ！こういう考え方は好きですねぇ。うまく行けばかなりエネルギーの節約になる。数学的発想です。

残念ながら、1次独立にはこの論法は使えません。例を見てみましょう。$\boldsymbol{a}_1 = (1,0), \boldsymbol{a}_2 = (0,1), \boldsymbol{a}_3 = (1,1)$ とします。このとき、このうちどの二つのベクトルをとっても二つは1次独立です。例えば、$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると、成分で書いて

$$(x,0) + (y,y) = (0,0)$$

ですが、第2成分の等式から $0 + y = 0$ つまり $y = 0$ となり、第1成分の等式から $x + y = 0$ ですが、$y = 0$ だったので、 $x = 0$ もでて来ます。したがって、

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば} \quad x = y = 0$$

となり、定義から $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ は1次独立です。他も同じようにできます。

ところが、3つを同時に考えると、

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = 0$$

ですから、0 でない係数 $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ について

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = 0$$

が成り立っており、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次独立ではありません。（1次従属）

> つまり、たくさんのベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**1次独立**とは、**どのベクトル a_i も、その他のベクトル達** $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ **によっては表わせない**（正確には 1次結合で表わせない）ことを言っているのです。

上記の2個づつ見るという発想は間違いではありましたが、1次独立の本質に迫るものでした。こういう間違いは発展性があって好ましいですね。

練習 1.2 実数 x, y, z に対して

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

が成り立っているとすると、ベクトルの等式で書くと

$$x(1,1,1)+y(-1,2,0)+z(-1,8,2)=(x-y-z,x+2y+8z,x+2z)=(0,0,0)$$

したがって、連立方程式

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 8z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

が成り立っている。第 3 式から

$$x=-2z.$$

また、第 2 式から第 1 式を引くと

$$3y+9z=0 \qquad \therefore y=-3z.$$

となり、$x=-2z, y=-3z$ を代入するとこの連立方程式は成り立っている。したがって、一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意の実数 })$$

となり、解は $x=0, y=0, z=0$ 以外にも無数にある。したがって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属

講評

ベクトルの和が計算できていない人が何人かいましたが、おおむね良くできていました。$x=-2z, y=-3z$ まで出しながら、$x=0, y=0, z=0$ 以外にも解が有る事が一次従属だということに気がつかなかった人が大分居ました。これは惜しいですね。