1 月 20 日分 練習の解答

練習 11.1 次の行列が対角化できるかどうか調べ、対角化できるときはその n 乗を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（解答）

(1)　この行列を A と書く事にする。A の固有多項式は

$$g_A(\lambda) = |\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$$

なので、A の固有値は $\lambda = 1, -2, 2$ の 3 つとなる。

固有値 1 に属する固有ベクトルは 同次方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

を $\lambda = 1$ として満たすので、

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$y = z = 0$ がわかる。$x = t$ とかくと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。

固有値 -2 に属する固有ベクトルは $\lambda = -2$ のときの同次方程式 (1) を満たすので

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

簡約化すると

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$x + \frac{z}{5} = 0, y - \frac{4z}{5} = 0$ を満たす。$z = t$ と書いて求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=2$ に属する固有ベクトルは $\lambda=2$ として同次方程式 (1) を満たすので

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。右辺の行列の簡約形を求めると、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$x=-z,\, y=0$ となり、$z=t$ と書いて、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

となる。

$P=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と書くと、P は

$$AP=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たす。A は対角化できる。P^{-1} を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$A^n=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

これを計算して

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -1-\frac{1}{4}(-2)^n+\frac{5}{4}2^n & 1-2^n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}((-2)^n-2^n) & 2^n \end{pmatrix}$$

となる。

(2)　この行列を B と書く。講義と同じように対角化できない事を背理法で示す。ある正則行列 P でこの行列 B が対角化できるとする。

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ |P|=ad-bc\neq 0,\ P^{-1}=\frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned}
P^{-1}BP &= \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & d-b \\ -c & a-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad+cd-bc & -d^2 \\ -c^2 & -bc+d(a-c) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり、これが対角行列なので $b = c = 0$ でなければいけないが、そうすると $|P| = ad - bc = 0$ となり、P が正則であるという仮定に矛盾している。