

10月14日分 練習の解答

練習 2.1 (1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  だから、

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & -2+3 \\ -1+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-1 & -2-3 \\ -1-4 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3-8 & 9-4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3-3 & -2 \\ 12-2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30+25 & -15 & -10-10 \\ -6-15 & -3 & -2+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -15 & -20 \\ -21 & -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 数学的帰納法による。 $n = 1$  のとき、示すべき等式の両辺とも  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  となるので、等式は正しい。 $n$  のとき正しいとして、 $n + 1$  のときも等式が成り立つ事を示す。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

最後の等式は帰納法の仮定による。これを計算すると

$$\text{右辺} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 & 2^n + 2^{n-1}n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n(n+1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

となり、等式は  $n + 1$  でも正しい。

(3) とにかく  $A^2$  を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ひょっとして

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

ではないかと思えるので、これを仮定して  $n + 1$  のときを考えると、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & -\cos n\theta \sin \theta - \sin n\theta \cos \theta \\ \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta & -\sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 講評

- (1) のできは非常に良かったです。皆さん  $2 \times 2$  行列の計算にはなれていますね。良い事です。行の数と列の数が違う行列の計算に戸惑った人も居ました。計算問題を繰り返している内になれるでしょう。教科書の問題を自分で解いてみてください。線形代数は加減乗除の計算しかありませんが、計算間違いしやすいので、ゆっくりひとつずつ計算して行く必要があります。間違っただけは、なぜ間違っただけを確認しておいてください。

1. は証明問題ですが、 $n$  に関する主張を証明せよというのですから、うまい証明がぱっと思い付かないときは、数学的帰納法をつかうことを考えてください。誰かが行っていましたか  
困ったときは帰納法

というのは、真実を伝えています。できた人は大分少なかったですが、それでも10人は越えていたと思います。

2. は、一見証明問題に見えませんが、これも一般の  $n$  に関する式を求める問題なので、常套手段は

- (a) まず  $n = 2, 3$  あたりを計算してみる。
- (b) その結果を眺めて一般の  $n$  のときの式を予想する。
- (c) 数学的帰納法を使って予想が正しい事を証明する。

のステップをとります。今回は  $n = 2$  のときの式がすでに一般の  $n$  のときの式を予想させます。ただ、三角関数の加法定理、倍角の公式を忘れたら難しい問題になりますね。復習しておきましょう。

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\end{aligned}$$

ですね。 $A = B$  のときの式が倍角の公式です。普通、左辺を書いてみると右辺が自然にでてくる人が多いのですが、右辺を見て左辺のように変形できるという使いかたもよくします。そこに気がつけば、この問題は標準的な問題です。

この行列が回転を表す行列だという事を知っている人も居ました。ベクトルに一回この行列を書けると、 $\theta$  だけ回転したベクトルが得られるわけですね。面白いですね。