12月 2日分 練習の解答

練習 7.1 (1)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{第 1 行に第 4 行 $\times 2$ を加え、} \\
& && \text{第 2,3 行に第 4 行 $\times(-1)$ を加える} \\
=&\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{第 1 列で展開} \\
=&\begin{vmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} && \text{第 2 列に第 3 列 $\times 3$ を加える} \\
=&\begin{vmatrix} -1 & 14 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{第 3 行で展開} \\
=&\ (-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 14 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1-42) = 41
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{第 4 列に第 1,2,3 列を加える} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} && \text{第 4 列で展開} \\
=&\ 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{第 1 列を第 2,3 列に加える} \\
=&\ 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} && \text{下三角行列の行列式なので、6 章の例 6.1 より} \\
=&\ 4\cdot 1\cdot 2\cdot 2 = 16
\end{aligned}
$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{第 4 行に第 3 行} \times(-1) \text{ を加え} \\ \text{第 3 行に第 2 行} \times(-1) \text{ を加える} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ 性質 5 による})$$

講評　いやあ、みんな見違えるように 4×4 行列の計算ができるようになっています。1 回説明したらこんなに違うなんて嬉しいですね。中には行列式を変形して上（下）三角行列にして対角成分を掛けあわせて行列式を求めている高等テクニックを身につけている人もいて驚きました。(2) では結構第 3 列に第 1 列を加え、第 4 列に第 2 列を加えて

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

としておいて、これが $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ に等しい事を使って計算した人がいました。やっぱり簡単に計算できる例はみなすぐに覚えますね。

(3) では変形の結果二つの列または二つの行が全く同じ形になります。この時点で行列式の性質 5 が使えて行列式の値は 0 である事が分かります。

行列式の変形では、必ずどれかの行または列に注目し、一つの成分以外は 0 になるように変形して、その行（または列）で展開するのがスタンダードな計算のやり方です。愚直にこう計算していって行列式の次数を落して行けば、最後は 2×2 の行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の形の行列式に数字を掛けたものが残ります。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

と計算して、答にたどり着きます。

いくつか重要な間違いが出て来ましたので、注意しておきます。これらの間違いは行列式を理解するには非常によいタイプの間違いです。

間違い 1　$2r$ 次正方行列 A が r 次正方行列 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を使って

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

とかけているとき、

$$|A| = |A_{11}||A_{22}| - |A_{12}||A_{21}|$$

と計算している人が居ました。いかにもありそうな形ですが、これは $A_{12} = 0$ または $A_{21} = 0$ のときには例でやったように正しいのですが、**一般には正しくありません**。でも、こういう発想は好きですね。

間違い 2　次のような計算をした人が居ました。

「第 1 行から第 2 行を引き、第 2 行から第 3 行を引き、第 3 行から第 1 行を引く計算を同時にやる」

なるほど、例でもいくつかの行変形を同時にやっていますね。でもこれはいけないのです。**あくまでも一つの行変形の結果に対して次の行変形を行うのです**。実際、 3 次の正方行列でやってみましょう。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}$$

が正しいとしましょう。そうすると右辺は 第 2 行に 第 3 行を加えると

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-a21 & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}$$

となります。(最後は第 1 行に第 2 行を加えました。) つまり、どんな行列の行列式も 0 になってしまいます。これは最初に **やってはいけない計算をやったためです。** 同時に複数の行変形をするときは、必ず一つづつの行変形と同じ結果になることを確かめながらやってください。たとえば、

第 1,2 行に第 3 行を加えるのは構いません。

これは第 1 行に第 3 行を加えたあとに 第 2 行に第 3 行を加えるのと結果が同じだから良いのです。列変形でもこのことは同じです。