1月 27 日テストの解答

1. 次の連立一次方程式を解け。

$$(1)\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -2y & +z & = & 0\\ x & +2y & -4z & = & 0\\ -3x & +2y & & = & 0 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & -2z & +2u & = & 5\\ 2x & -2y & -3z & +3u & = & 10\\ -x & +6y & +3z & -2u & = & 2\\ x & +4y & & -u & = & -10 \end{array}\right.$$

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -4\\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9\\ 1 & 2 & -4\\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ \frac{3}{2}\\ 1 \end{pmatrix}$ となる。ただし、t は任意の実数。

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 5\\ 2 & -2 & -3 & 3 & 10\\ -1 & 6 & 3 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 6 & 2 & -3 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 20\\ 0 & 2 & 0 & -1 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 20\\ 0 & 2 & 0 & -1 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 2 & 0 & -1 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 11 & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

となり、$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ -2\\ 15\\ 11 \end{pmatrix}$

2. 次の行列 A, B に対して A^{-1} と ABA^{-1} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -2 \\ 22 & -14 & -3 \\ -13 & 9 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 次の行列の行列式を計算せよ。

$$
(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 27 \end{vmatrix}
$$

解答

(1)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 70 = 45
$$

(2)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & -9 & 19 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 5 \\ -7 & -9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ -7 & 12 & 12 \end{vmatrix} = -12 \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -48
$$

4. 次の行列 C の固有値を求め、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

$$\lambda E_3 - C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

ゆえに、固有多項式は

$$\begin{aligned} g_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 1)^2 - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

となり、固有値は $1, 2, -1$ である。

固有値 1 に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、 $x = 0,\ y + z = 0$ となり、$z = t$ とかくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 2 に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と基本変形する事により、$x = -z,\ y = z$ がわかる。$z = t$ とかくと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

となる。

固有値 -1 に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と基本変形する事により、 $x = 2z,\ y = z$ がわかる。 $z = t$ とかくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。