10　固有値

行列を左からかける事でベクトルは別のベクトルにうつる。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

というように、一般には大きさも向きも変わる。しかし、行列によって写されたベクトルが元のベクトルの実数倍になっている場合がある。例えば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

などがそうである。この様になる実数やベクトルは、左からかける行列とどのような関係があるのだろうか。

10.1　固有値と固有ベクトル

n 次の正方行列 A に対して、実数 λ と n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

を満たすとき、λ は A の**固有値**、$\boldsymbol{x}$ は A の **固有値 λ に属する固有ベクトル**という。この定義から想像できるように、どんな値も A の固有値になるとは限らない。では、どのような λ が A の固有値になるのだろうか？

λ が A の固有値なら、これに属する固有ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ があり、(1) 式を満たしている。$A\boldsymbol{x} = \lambda E_n\boldsymbol{x}$ とかけるから、移項をすると

$$(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

という同次方程式が得られ、これが $\boldsymbol{x}$ という自明でない解を持つためには

$$|\lambda E_n - A| = 0 \tag{3}$$

が必要かつ十分になる。実際、$|\lambda E_n - A| \neq 0$ ならば $(\lambda E_n - A)^{-1}$ があるので、(2) の左からこの逆行列をかけて、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得るので、(2) は自

明な解しかもたない。一方、(2) が自明な解しかもたなければ行基本変形により簡約形は E_n になるが、この変形の過程で行の入れ換えや、どれかの行を 0 でない定数倍を行った分だけ行列式は定数倍の変化を受けるので、$|\lambda E_n - A| = a|E_n| = a$ となる実数 $a \neq 0$ がある。

この方程式 (3) を行列 A の固有方程式といい

$$g_A(x) = |xE_n - A|$$

を A の固有多項式という。固有方程式 (3) の解を A の固有値という。これは複素数の値も許す。

10.2　固有値の計算、固有ベクトルの求め方

実際に例で固有値や固有ベクトルを求めてみよう。上の例の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては、$g_A(x) = x^2 - 2x - 3$ で $x = -1, 3$ が固有値になり、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ 3 および -1 に属する固有ベクトルになる。

例 10.1 $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めてみる。

固有多項式は

$$\begin{vmatrix} x-8 & 10 \\ -5 & x+7 \end{vmatrix} = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

となるので、固有値は $-2, 3$ となる。固有値 -2 に属する固有ベクトルは $-10x + 10y = 0$ を満たすので、$x = y$ となり、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍のベクトルがすべて求める固有ベクトルになる。固有値 3 に属する固有ベクトルは $-5x + 10y = 0$ を満たすので、$x = 2y$ となり、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍のベクトルがすべて求める固有ベクトルになる。

n 次の正方行列に対する固有値を求めるには n 次方程式を解かないといけない。これは簡単ではない。また、$n=2$ でも固有方程式が実数解を持たない事はあり得る。このときは実数の 2 次元空間内には固有ベクトルは無い事になる。(成分を複素数まで許したところで考えると固有値も固有ベクトルも求める事ができる。)

例 10.2 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めてみる。

この行列の固有多項式は

$$\begin{aligned} g_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-2)^2+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-2)^2-2(x-2)=(x-2)(x^2-5x+6-2) \\ &= (x-2)(x-1)(x-4) \end{aligned}$$

したがって、固有値は $1,2,4$ である。

固有値 1 に属する固有ベクトル

このベクトルは (2) に $\lambda=1$ を代入した式:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすので、左辺の行列の行基本変形を行なって

$$1E_n-A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これは $x+z=0, y-z=0$ を意味している。したがって $z=t$ と書くと、$x=-t, y=t$ となるので、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける事がわかる。(t は任意の実数)

固有値 2 に属する固有ベクトル

このベクトルは、(2) に $\lambda=2$ を代入した式:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすので、左辺の行列の行基本変形を行なって

$$2E_n-A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これは求める固有ベクトルが $x=0, y+z=0$ を満たす事をいっており、$z=t$ と書いて、 $x=0, y=-t$ なので、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。(t は任意の実数)

固有値 4 に属する固有ベクトル

このベクトルは (2) に $\lambda=4$ を代入した式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、

$$4E_n-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、$x=2z, y=z$ を得るので、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求める固有ベクトルである。(t は任意の実数)

練習 10.1 次の行列に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$