11　行列の対角化

固有値と固有ベクトルを使うと行列の n 乗が楽に計算できる。

例 11.1 $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ に対して固有ベクトルを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$AP = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので、P^{-1} を右からこの等式にかけると

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる。$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と書く事にすると、

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

となり、これを n 回繰り返せば

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

となることが確かめられる。P^{-1} を求めよう

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって求める A^n は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 2\cdot 3^n \\ (-2)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(-2)^n + 2\cdot 3^n & -(-2)^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ -(-2)^n + 3^n & -(-2)^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

で与えられる。

注意 11.1 上の例ででてきた行列 $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のように、対角成分以外がすべて 0 になっている行列を**対角行列**と呼ぶ。上の方法でいつも対角行列に変形できるわけではない。変形できるとき元の行列を**対角化可能**という。そうでない例としては

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

がある。

実際、もし、ある正則な行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって $P^{-1}AP$ が対角行列になったとすると、

$$P^{-1}AP = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}$$

なので、$P^{-1}AP$ の対角成分以外が 0 であることから $c = d = 0$ でなければならないが、このとき $|P| = ad - bc = 0$ となってしまい、P が正則であるという仮定に矛盾する。

したがって $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化できない事がわかる。

一般には n 次の正方行列 A が正則な行列 P と P^{-1} を使って

$$P^{-1}AP = B, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

と対角化できるためには、A の一次独立な固有ベクトルが n 個ある事が必要十分なことが知られている。実際、A が正則な行列 P と P^{-1} を使って対角化できたとすると上の式に P を左から掛けて

$$AP = PB$$

となる。P の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ とかくと、この式は B が対角行列なので

$$A\boldsymbol{p}_j = b_{jj}\boldsymbol{p}_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

を意味している。つまり、b_{jj} は A の固有値であり、$\boldsymbol{p}_j$ は固有値 b_{jj} に属する固有ベクトルであり、P は固有ベクトルを並べたものとなっている。P が正則なので、同次方程式 $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解しかもたないので、$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立。

一方、A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立のとき、$\boldsymbol{p}_j$ が属する固有値を λ_j とかくと、$P = [\boldsymbol{p}_1, \ldots \boldsymbol{p}_n]$ に対して

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つので、$P^{-1}AP$ は対角行列になる。

上の例で $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ についてみると、固有多項式は

$$g_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

となるので、固有値は 0（重解）で、固有ベクトルの満たす方程式は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だが、これは $y = 0$ となるので、固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり、 1 次独立なものは 1 個しか取れない。

例 11.2

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ の } n \text{ 乗を計算する。}$$

固有多項式は

$$g_A(x) = \begin{vmatrix} x-7 & 6 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} = (x-7)(x+2)+18 = x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$$

なので固有値は 1, 4 となり、1 に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、$-x + y = 0$ したがって固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

4 に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすので、$-x + 2y = 0$ したがって固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

二つの固有ベクトルを並べて行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$|P| = -1 \neq 0$ で正則で、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となり、これを n 回掛けて

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

これを計算して

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n - 1 & 2 - 2 \cdot 4^n \\ 4^n - 1 & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

練習 11.1 次の行列が対角化できるかどうか調べ、対角化できるときはその n 乗を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$