2　行列

行列　行ベクトル　列ベクトル　正方行列　転置行列

同じ次元の横ベクトルを縦に並べたもの:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

の様に成分で書く。上の例は 4 次元の横ベクトルを縦に 3 個並べたもの。これは 3 次元の縦ベクトルを横に 4 個並べたものとも見ることができる。行列の横ベクトルを**行ベクトル**、縦ベクトルを**列ベクトル**と呼ぶ。

一般には

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の様に書き、m 行 n 列の行列（または $m \times n$ 行列）と呼ぶ。$m = n$ のとき行列は**正方行列**という。

上の行列 A の行と列を入れ換えた行列を ${}^tA$ と書き、A の**転置行列**という。

ベクトルは行列である。m 次元縦ベクトルは $m \times 1$ 行列であり、n 次元横ベクトルは $1 \times n$ 行列である。

2.1　行列の和と積、スカラー倍

行列の和、差、スカラー倍

ベクトルと同じように成分毎に行う。従って、おなじ行数と列数を持つとき和と差が定義できる。

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

のように計算する。スカラー倍はすべての成分を同じスカラー倍する。

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

行列の積　$m \times n$ 行列 A と $n \times k$ 行列 B に対して、積 AB を $m \times k$ 行列として次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jk} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{jk} \end{pmatrix}$$

つまり、行列 AB の (i,j)-成分 $(AB)_{ij}$ は

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$$

と計算する。

例 2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{pmatrix}$$

積の公式 A, B ：$m \times \ell$ 行列、$C : \ell \times n$ 行列、$D : k \times m$ 行列とするとき、積 AC, BC, DA, DB と $D(AC), (DA)C$ が定義できて, AC, BC は $m \times n$ 行列、DA, DB は $k \times \ell$ 行列、$D(AC), (DA)C$ は $k \times n$ 行列となり、次の公式が成り立つ。

1. $(A+B)C = AC + BC$
2. $D(A+B) = DA + DB$
3. $D(AC) = (DA)C$
4. $r(AC) = (rA)C$　　r は実数。

注意 2.1 AC が定義できても CA が定義できるかどうかは分からない。定義できるには $m=n$ が必要。また、CA が定義できたとしても AC と CA が等しいとは限らない。例えば、

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

とすると、

$$AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad CA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

となり、確かに $AC\neq CA$ となる。

行列の積はかける順番が大事！

行列の積について、次の**単位行列**は重要である

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&&\cdot\\\cdot&&\cdot&&\cdot\\\cdot&&&\cdot&0\\0&0&\ldots&0&1\end{pmatrix}$$

縦横のサイズはそれぞれ n である。成分で見ると

$$(E_n)_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\ \text{のとき}\\0 & i\neq j\ \text{のとき}\end{cases}$$

となっている。$m\times n$ 行列 A に対しては

$$E_mA=AE_n=A$$

が成り立っている。（実数のときの 1 の役割）

2.2　行列とベクトルの積：１次変換

n 次元ベクトルを行列と見れば、縦ベクトルと行列の積、横ベクトルと行列の積も行列の積の定義に従って計算できる

例 2.2

$$(1,2,3)\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=(2,5),\quad \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

横ベクトルに右から行列をかけると（積が定義されていれば）横ベクトルができる。

縦ベクトルに左から行列をかけると（積が定義されていれば）縦ベクトルができる。

行列の積の性質から、$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ を n 次元横ベクトルとすると $n\times\ell$ 行列 A によって新しい ℓ 次元横ベクトル $\boldsymbol{x}A,\ \boldsymbol{y}A$ が得られ、

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})A=\boldsymbol{x}A+\boldsymbol{y}A$$

が成り立つ。縦ベクトルに付いても同じ。

１次変換

$\boldsymbol{x}$ を n 次元縦ベクトルとして、A を $m\times n$ 行列とするとき、$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ で m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ を定義すると、これを成分で書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\:&=:\\y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\end{aligned}$$

A は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ に写す**１次変換の行列**という。

練習 2.1

1. $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6&3&2\\5&0&-2\end{pmatrix}$ のとき、$A-B,A+B,AB,BA,ABC$ を求めよ。

2. 正方行列 A の n 個の積を A^n と表すとき、次を示せ。
$$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&2^{n-1}n\\0&2^n\end{pmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ に対し、A^n を計算せよ。