

だから、 $x_1 = 5/7, x_2 = -8/7, x_3 = -6/7$ である事が分かる。

この計算方法を掃き出し法という。

行列の(行)基本変形

上の計算は方程式の拡大係数行列に次のような変形を行っている。(この変形は一般の $m \times n$ 行列に対して行う事ができる操作である。)

- (I) 1つの行を0でない定数倍する
- (II) 1つの行の定数倍を他の行に加える
- (III) 1つの行と他の行を入れ替える

例 3.1 次のように行基本変形を行う事ができる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m \times n$ 行列 A の行基本変形は A の左から特別な形の m 次正方行列をかけて得る事ができる。

例 3.2 (I の変形操作) 第 i 行を r 倍 ($r \neq 0$) する行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & r & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(第 i 行の対角成分だけ r で、他の対角成分は 1, 対角成分以外は 0 の行列) を左からかけると、 A の第 i 行だけが r 倍され、他は変わらない。

例 3.3 (II の変形操作) $i \neq j$ のとき、第 i 行を r 倍して第 j 行に加える行列 (次の例は $i < j$ のとき。 $i > j$ のときは r が対角線の上にくる)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad \begin{pmatrix} & & \overset{i}{\dots} & & \overset{j}{\dots} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(対角成分が 1 で、 (j, i) -成分が r の他はすべて 0 の行列) を左からかけると、 A の第 i 行の成分が r 倍されて同じ列の A の第 j 行の成分に加えられる。

例 3.4 (III の変形操作) 第 i 行と第 j 行を入れ替える行列 ($i < j$ のとき)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad \begin{pmatrix} & & \overset{i}{\dots} & & \overset{j}{\dots} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(第 i 行と第 j を除いた対角成分が 1 で、第 i 行は (i, j) 成分が 1, 第 j 行は (j, i) 成分が 1, 残りの成分はすべて 0) を左からかけると A の第 i 行と第 j 行が入れ替わる。

これらの行基本変形 (I),(II), (III) に対応する行列を行基本行列とよぶ。