3.2 簡約形

$m \times n$ 行列 A に対して行基本変形を施して次のような**簡約形**にすることができる。つまり、行列が簡約な行列であるとは

- 行ベクトルのうち、零ベクトルがあれば、それは零でないベクトルの下にある。
- 零ベクトルでない行ベクトルの成分のうち、0 でない一番左の要素（これを**主成分**という）は 1
- 主成分の位置は行が違うと異なり、下の行ほど右にある。
- 各行の主成分を含む列では、この主成分以外はすべて 0.

例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般には、下の方の行は 0 のみが並ぶこともあり、簡約形は

$$\begin{pmatrix} S \\ O \end{pmatrix}$$

の形（ S は各行に主成分 1 が残る行列。O は各成分が 0 の行列（零行列））。S を $r \times n$ 行列とすると $r \leq n$ で、O は $(m-r) \times n$ 零行列。

$O_{k,\ell}$ で $k \times \ell$ 零行列を表すものとすれば、さらに列に関する基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

とできる。この形を **標準形**と呼ぶ。

このとき、r の値は基本変形のやりかたによらないことが知られている。r をもとの行列 A の**ランク（階数）** という。

例 3.5 標準形を求める方法は一通りではない。しかし、結果は一致する。基本変形をおこなうと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また、次のような変形も可能

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列のランクは 3 である。

例 3.6 (教科書 p.27 問題 2.2 (1) ∼ (4))

以下の行列について、簡約か否かを判定し、簡約でないものは簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は簡約形ではない。なぜなら零ベクトルである行ベクトルが零ベクトルでない行ベクトルの上に有る。簡約形にするには、第 1 行と第 2 行を入れ換えれば良い。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は簡約形ではない。なぜなら第 2 行の主成分（$(2,2)$-成分）の列に 0 でない成分が残っている。($(1,2)$-成分) 簡約形にするには、第 1 行から第 2 行を 2 倍して引けば良い。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は簡約形ではない。なぜなら第 3 行の主成分（(2,2)-成分）の列に 0 でない成分が残っている。簡約形にするには、第 3 行から第 2 行を引けば良い。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は簡約形ではない。なぜなら主成分が 1 でない行が有るし、主成分以外に 0 でない成分をもつ列ベクトルが有る。簡約形にするには、第 2 行から第 3 行を引き、その後第 2 行に 1/2 をかけると良い。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

少し大きいサイズの行列を簡約化しよう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & -4/5 & 8/5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1/5 & -4/5 & 8/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

ところで、元の行列の左側

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

と最後の行列の右側

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 4 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

については $AB = BA = E_3$ が成り立っている。(B は A の、A は B の逆行列であるという。)