4　連立 1 次方程式を解く

連立 1 次方程式には、

1. 解を持たないもの
2. 解が唯 1 組あるもの
3. 解が無限にたくさんあるもの

の 3 種類に分かれる。

例 4.1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

は解を持たない。

n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する m 個の方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{cases} \tag{1}$$

の解を求めてみよう。a_{ij} と c_j を並べた行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

は拡大係数行列と呼ばれる。係数行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を考えると、拡大係数行列は A に 1 列を加えただけなので、簡約形にする事で、そのランクは $\mathrm{rank}(A)$ か $\mathrm{rank}(A)+1$ のどちらかになる。拡大係数行列のランクが $\mathrm{rank}(A)+1$ のときは、行基本変形の結果

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} S & D \\ O & F \end{array}\right)$$

の形にかけ、 $\mathrm{rank}(A) = r$ とかくとき、S は r 個の零ベクトルでない行からなっている。D は $r \times 1$ 行列 （r 次元縦ベクトル）であり、F は $(m-r) \times 1$ 行列（$m-r$ 次元縦ベクトル）で

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形をしている。この拡大係数行列の $r+1$ 行目に対応する方程式は

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$$

の形になり、この方程式は解を持たない事が分かる。したがって、考えている方程式 (1) は

拡大係数行列と係数行列のランクが等しいときだけ解がある

という事が分かる。

4.1　任意性のある解

先程の拡大係数行列を $(A \mid \boldsymbol{c})$ と書くことにしよう。$\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A) + 1$ のときには方程式 (1) は解を持たなかった。$\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A)$ のときを考えよう。

1 ）$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるが、最初に $\mathrm{rank}(A) = n$ のときを考える。このとき、$m \geq n$ となるが、A は基本変形により、簡約形

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix}$$

となり、したがって行基本変形の組合せの行列 P がとれて

$$PA\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} E_n \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}' \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

ここで、 $\boldsymbol{c}'$ は n 次元縦ベクトルで、$\boldsymbol{0}$ は $m-n$ 次元の零ベクトル（縦ベクトル）である。（ $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A)$ だから。）したがって

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'$$

が成り立っており、このときは解が唯一組決まる。

２）$n > \mathrm{rank}(A)$ のとき。このときは、簡約形にしたときの主成分に対応する以外の x_i 達に、任意に値を与える毎に解が一組づつ決まる。このように、拡大係数行列を簡約形にする事で、方程式を解く事ができる。

例 4.2

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 3x - 3y + 4z &= 2 \end{cases}$$

を解く事を考える。

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり、拡大係数行列のランクと係数行列のランクが等しく 2 である。また、主成分に対応する変数は x, y なので、 $z = t$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解になる。

4.2 同次方程式

連立一次方程式 (1) で、すべての i について $c_i = 0$ となるものを同次方程式と呼ぶ。この方程式は $x_i = 0,\ 1 \leq i \leq n$ を自明に解として持つが、それ以外に解があるかどうかを調べよう。先程調べたように、$\mathrm{rank}(A) = n$ のとき基本変形により $x_i = 0$ がすべての i についてでてくるので、($\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{0}$ である) このときは自明な解しかない。

$\mathrm{rank}(A) < n$ ならば、基本変形で簡約形にしたとき、主成分が 1 となる行ベクトルが $\mathrm{rank}(A)$ 個現れ、これ以外に対応する変数は自由に取って解が作れる。

例 4.3

$$\begin{cases} x + ay &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \qquad (a \text{ は実数})$$

を解こう。

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

なので、 $a \neq 1$ のときは係数行列の簡約形は E_2 になる。このときは $x = y = 0$ の自明な解しかない。

$a = 1$ のときは係数行列のランクが 1 になり、 $x = -y$ ならば何でも解になる。

4.3 正則行列と逆行列

方程式 $ax = b$ は $a \neq 0$ のとき解けて、解は $x = a^{-1}b = b/a$ と書ける。a^{-1} は a の逆数であるから、 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ である。同じように、連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

において、A が $n \times n$ 行列のとき、 $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ となる行列 A^{-1} があれば、

$$\boldsymbol{x} = E_n\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{c}$$

と計算する事ができ、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が唯一つの解 $A^{-1}\boldsymbol{c}$ をもつ事が分かる。

A^{-1} を A の**逆行列** といい、 A が逆行列をもつとき A は**正則な行列**（または**正則行列**）という。

逆行列を求めるには、 A と E_n を横に並べた行列を基本変形して

$$(A \mid E_n) \longrightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

と簡約形にする事で求められる。つまり A が正則なとき A の簡約形は E_n となる。

練習 4.1 次の連立方程式は解を持つか。持つ場合は解を求めよ。ただし、p は実数とする。

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_3 &= 5 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 0 \\ px_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$