5　行列式

正方行列 A に対してその**行列式** $|A|$ を定義するのがこの節の目標。

5.1　連立一次方程式と行列式 (2×2 の場合)

次の連立方程式を考えよう。

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= c_2 \end{cases} \tag{1}$$

これを解くのに、(1) の第 1 式に a_{22} をかけたものから (1) の第 2 式に a_{12} をかけたものを引いて、

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = c_1a_{22} - c_2a_{12} \tag{2}$$

また、(1) の第 2 式に a_{11} をかけたものから第 1 式に a_{21} をかけたものを引くと、

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = c_2a_{11} - c_1a_{21} \tag{3}$$

したがって、$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$ ならば方程式 (1) は解ける。

(1) を眺め直してみる。行列とベクトルを使ってこれを一気に書くと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

となる。そこで、天下りではあるが、行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

に対して、

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

と書く事にする。$|A|$ は $\det A$ と書く流儀もあり、行列 A の **行列式** (determinant) と呼ばれる。

(2) を行列式を使って表わしてみると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ したがって } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同じ様に (3) を行列式を使って表してみると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}, \text{ したがって } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

5.2　行列式の一般の定義

3 次の正方行列の行列式を定義しよう。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

に対して $|A|$ は次のように定義する。

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{4}$$

余因子

上の式で、a_{11} にかかっているのは、A の第 1 行と第 1 列を取り除いた行列の行列式。a_{21} にかかっているのは、A の第 2 行と第 1 列を取り除いた行列の行列式で、最後の a_{31} にかかっているのは、A の第 3 行と第 1 列を取り除いた行列の行列式。だから、$\overline{A_{ij}}$ を A の第 i 行と第 j 列を取り除いた行列とすると、(4) は

$$|A| = a_{11}|\overline{A_{11}}| - a_{21}|\overline{A_{21}}| + a_{31}|\overline{A_{31}}|$$

となる。似たような量を考えよう。すると不思議な事に

$$\begin{aligned} a_{12}|\overline{A_{12}}| - a_{22}|\overline{A_{22}}| + a_{32}|\overline{A_{32}}| &= -|A| \\ a_{13}|\overline{A_{13}}| - a_{23}|\overline{A_{23}}| + a_{33}|\overline{A_{33}}| &= |A| \end{aligned}$$

となっている。列の代わりに行を使っても似たような事が成り立つ

$$\begin{aligned} a_{11}|\overline{A_{11}}| - a_{12}|\overline{A_{12}}| + a_{13}|\overline{A_{13}}| &= |A| \\ a_{21}|\overline{A_{21}}| - a_{22}|\overline{A_{22}}| + a_{23}|\overline{A_{23}}| &= -|A| \\ a_{31}|\overline{A_{31}}| - a_{32}|\overline{A_{32}}| + a_{33}|\overline{A_{33}}| &= |A| \end{aligned}$$

上の式は次のようにまとめられる。3 次の正方行列 A について、$i = 1,2,3, j = 1,2,3$ のどれについても次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1}a_{i1}|\overline{A_{i1}}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|\overline{A_{i2}}| + (-1)^{i+3}a_{i3}|\overline{A_{i3}}| \\ &= (-1)^{1+j}a_{1j}|\overline{A_{1j}}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|\overline{A_{2j}}| + (-1)^{3+j}a_{3j}|\overline{A_{3j}}| \end{aligned}$$

これを参考にして、一般の n 次の正方行列 A に対して、その行列式 $|A|$ を

$$|A| = a_{11}|\overline{A_{11}}| - a_{21}|\overline{A_{21}}| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}|\overline{A_{n1}}| \tag{5}$$

と定義する。a_{ij} に対して $(-1)^{i+j}|\overline{A_{ij}}|$ を a_{ij} の**余因子**という。

例 5.1 定義にしたがって行列式を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0-(-2)+2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot(-2) - 5\cdot(-16) + 3\cdot(-1) = 73 \end{aligned}$$

5.3 行列式の展開

上で 3 次の行列で説明した事は、一般の n 次正方行列の行列式にも当てはまる。

n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ の定義は余因子を使って

$$|A| = a_{11}|\overline{A_{11}}| - a_{21}|\overline{A_{21}}| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}|\overline{A_{n1}}|$$

と定義したが、これを $|A|$ を第 1 列で展開した式と言う。第 1 列の代わりに第 j 列で展開する事もできる。

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|\overline{A_{1j}}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|\overline{A_{2j}}| + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}|\overline{A_{nj}}|$$

ただし、 $\overline{A_{ij}}$ は、元の行列 A から第 i 行と第 j 列を除いた行列。

列でなく行で展開する事もできる。第 i 行で展開すると

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|\overline{A_{i1}}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|\overline{A_{i2}}| + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}|\overline{A_{in}}|$$

が成り立つ。これは帰納法で証明できるが、省略する。あとに述べる行列式の性質を使うと分かりやすい。

練習 5.1 次の行列式を計算せよ

1. $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$