6　行列式の性質

以下に行列式の満たす性質を挙げる。これらの性質を使うと計算が簡単になる。

1. 正方行列 A の行列式とその転置行列 ${}^tA$ の行列式は同じ。つまり、

$$|A| = |{}^tA|$$

以下、列に対して成り立つ計算はこのことから行に対しても成り立つ。

証明は $|A|$ の第 1 行での展開と ${}^tA$ の第 1 列での展開を見比べて帰納法を使えばいい。

2.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

証明は左辺の行列式を第 j 列で展開してみればいい。

3. r を実数として、A の一つの列を r 倍すると、行列式は r 倍になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ra_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & ra_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これも左辺を第 j 列で展開するといい。

4. 二つの列を入れ換えると、行列式の符号が変わる。いま、$j < k$ とすると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明はまず $j = i+1$ のときに、 もとの行列を A、その第 i 列と第 $i+1$ 列を入れ換えた行列を A' とかくとき、$|A|$ を第 i 列で展開した式と $|A'|$ を第 $i+1$ 列で展開した式を比べると、 $|A'| = -|A|$ が分かる。一般の場合はこれを繰り返すことでわかる。

5. 二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k$ が等しいとき、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式 $|A|$ の値は 0 になる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \overset{j}{\smile} & & \overset{k}{\smile} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

証明は左辺で第 j 列と第 k 列を入れ換えても行列が変わらないので、行列式は一緒だが、上の性質 4 により、符号が入れ替わるので、$|A| = -|A|$ が成り立つ。ゆえに $|A| = 0$.

6. 一つの列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+ra_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+ra_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明は、性質 2、性質 3 と性質 5 を使えばいい。

7. 正方行列 A が 正方行列 B, C によって、

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad A = \begin{pmatrix} B & O \\ E & C \end{pmatrix}$$

の形に分解されているとする。ただし、O は成分がすべて 0 の行列を表わす。このとき、

$$|A| = |B||C|$$

が成り立つ。

証明は B が 1×1 行列のときにはすぐに分かる。あとは帰納法。

8. A, B を n 次の正方行列とすると

$$|AB| = |A||B|$$

証明は、n 次正方行列 A, B に対して

$$|A||B| = \begin{vmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

を示す事で得られる。ただし、E_n は n 次の単位行列。

これは、第 1 列を b_{11} 倍、第 2 列を b_{21} 倍、... 第 n 列を b_{n1} 倍して 第 $n+1$ 列に加えると新しい第 $n+1$ 列は上から順に

$$\begin{gathered} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} \\ \cdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1} \end{gathered}$$

と並び、第 $n+1$ 行から下は 0 がならぶ。同じように、各 j について第 j 列を b_{ji} 倍 して第 $n+i$ 列に加えると新しい第 $n+i$ 列 は上から順に

$$\begin{gathered} a_{11}b_{1i} + a_{12}b_{2i} + \ldots + a_{1n}b_{ni} \\ a_{21}b_{1i} + a_{22}b_{2i} + \ldots + a_{2n}b_{ni} \\ \cdots \\ a_{n1}b_{1i} + a_{n2}b_{2i} + \ldots + a_{nn}b_{ni} \end{gathered}$$

と並び、以下は 0 が続く。この操作が $i = 1, 2, \ldots, n$ と終わった後、できた行列式は

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{vmatrix}.$$

第 i 行と第 $n+i$ 行を $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して入れ換えて、性質 3 と性質 4、および性質 7 を使って、

$$(-1)^n \begin{vmatrix} -E_n & O \\ A & AB \end{vmatrix} = (-1)^n |-E_n||AB| = |AB|$$

例 6.1 これらの性質を使って次のように行列式を計算する事ができる。

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} && \text{第 } 1,2,3 \text{ 行から第 } 4 \text{ 行を引く} \\
= &\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a \\ a-b & 0 & a-b & 0 \\ a-b & a-b & 0 & 0 \\ b & b & b & a \end{vmatrix} && \text{第 } 1,2,3 \text{ 行から因数 } a-b \text{ を出す} \\
= &(a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & b & b & a \end{vmatrix} && \text{第 1 列 から 第 2 列を引く} \\
= &(a-b)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & a \end{vmatrix} && \text{第 3 行で展開} \\
= &(-1)^{2+3}(a-b)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} && \text{第 3 列に第 1 列を加える} \\
= &-(a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4
\end{aligned}$$

練習 6.1 次の行列式を計算せよ。 (i) は因数分解した形で答えよ

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$