7 行列式の計算

行列式の計算には行列式の性質をフルに利用して、できるだけ簡単な計算になるようにする。いくつかの典型的な計算例を紹介しよう。

例 7.1 (1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

これは左辺を第 1 行で展開すると

$$左辺 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となり、帰納法が使える。

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}.$$

B が n 次正方行列なら $|AB| = |A||B|$ なので、B として

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

をとると、

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1,n} & \dots & a_{n-1,2} & 0 \\ a_{nn} & \dots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}$$

となり、$|B|$ の値は n が偶数のとき $(-1)^{n/2}$ で n が奇数のとき $(-1)^{(n-1)}/2$ となる。これは $(-1)^{n(n-1)/2}$ と等しい。

例 7.2 (Vandermonde の行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (第 2,3 列からそれぞれ第 1 列を引く)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad (第 1 列で展開)$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

例 7.3 (巡回行列式)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 行に第 2 行 と第 3 行を加える})$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad (\text{第 2,3 列からそれぞれ第 1 列をひく})$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\{(a-b)(a-c)+(b-c)^2\}$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

例 7.4

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} \quad (第 3 列に第 1 列を加え、第 4 列に第 2 列を加える)$$

$$= \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & 2c & -2d \\ d & c & 2d & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2c & -2d \\ 2d & 2c \end{vmatrix}$$

$$= 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

例 7.5 $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$ を計算する。

$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ のときは第 1 行がすべて 0 なので行列式の値も 0 になる。したがってこれらのどれかが 0 でない場合を考える。どの場合も同じように計算すればいいので、$a_{12} \neq 0$ のときを考える。このときは、第 3 行に第 1 行 $\times \frac{a_{23}}{a_{12}}$ を加え、第 4 行に第 1 行 $\times \frac{a_{24}}{a_{12}}$ を加えると

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{13} & a_{34} + \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{14} \\ -a_{14} & 0 & -a_{34} + \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{13} & \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{14} \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列で展開} \\
= & \ a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{13} & a_{34} + \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{14} \\ a_{14} & -a_{34} + \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{13} & \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{14} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{第 2 行と第 3 行を} \\ a_{12}^{-1} \text{ でくくり、前へ出す} \end{array} \\
= & \ a_{12}^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{12}a_{13} & a_{23}a_{13} & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} \\ a_{12}a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} & a_{24}a_{14} \end{vmatrix} \quad a_{12}^{-1} \text{ を 第 1 列にかける} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23}a_{13} & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} \\ a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} & a_{24}a_{14} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{（第 1 列に } a_{23} \text{ をかけたものを} \\ \text{第 2 列から引き、} \\ \text{第 1 列に } a_{24} \text{ をかけたものを} \\ \text{第 3 列から引く）} \end{array} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} \\ a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} - a_{14}a_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
= & \ (a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24})^2
\end{aligned}
$$

練習 7.1 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$