8 逆行列

正方行列 A に対してその逆行列 A^{-1} はいつでも有る分けではない。例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を考えると、前にやったように方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は解をもたないが、もし、A が逆行列 A^{-1} をもつなら

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と解けるはずであり、矛盾する。

そこで、どのようなときに逆行列があるのかを考える。

正方行列の行列式の展開

$n \times n$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくとき、A の行列式 $|A|$ を第 i 行で展開した式をみると

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}| + a_{i2}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}| + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}|$$

ここで、右辺の a_{ij} の代わりに c_j を使った式を考えてみると、

$$c_1(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}| + c_2(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}| + \dots + c_n(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}|$$

となるが、これは、A の第 i 行のベクトルを $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ で取り換えた行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

の行列式になっている。$i \neq 1$ のとき、$\boldsymbol{c}$ として A の第 1 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ で置き換えると、第 1 行と第 i 行が同じベクトルになり、その行列式は性質 5（で列を行に変えたもの）により 0 になる。まとめてみると、

$$\begin{aligned} & a_{11}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}| + a_{12}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}| + \dots + a_{1n}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}| \\ = & \begin{cases} |A| & i = 1 \text{ のとき} \\ 0 & i \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。上では $\boldsymbol{c}$ として第 1 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$ をとったが、一般に第 j 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ をとっても同じように、

$$\begin{aligned} & a_{j1}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}| + a_{j2}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}| + \dots + a_{jn}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}| \\ = & \begin{cases} |A| & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

が分かる。この式を行列で表す事ができる。そのために第 (i, j)-成分に $a_{j,i}$ に対応する余因子 $(-1)^{j+i}|\overline{A_{ji}}|$ を並べた行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |\overline{A_{11}}| & -|\overline{A_{21}}| & \dots & (-1)^{n+1}|\overline{A_{n1}}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}|\overline{A_{1n}}| & (-1)^{n+2}|\overline{A_{2n}}| & \dots & |\overline{A_{nn}}| \end{pmatrix}$$

を考える。これを使うと (1) は

$$A\tilde{A} = |A|E_n$$

とまとめる事ができる。$\tilde{A}$ は A の**余因子行列**と呼ばれる。

A を列で展開した式で同じ事をやると

$$\tilde{A}A = |A|E_n$$

が出てくる。上の二つの式は、

$|A| \neq 0$（このとき A は**正則**という） ならば

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

である事を言っている。

逆行列を求めるための実際の計算は掃き出し方による事が多い。これは考える n 次正方行列 A の右に単位行列 E_n をならべて、(A, E_n) の簡約形を求め、(E_n, B) とすると、 B が求める A^{-1} になっている事による。

例えば、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列は次のように計算する。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

逆行列の性質

n 次の正方行列 A に対して、 $A^2 = AA$ はまた n 次の正方行列になるしたがって $A^3 = A^2A = AA^2$ が考えられる。同じようにして自然数 k に対して A^k も n 次の正方行列となり、指数法則

$$A^{k+\ell} = A^k A^\ell \quad k, \ell \geq 0 \text{ は整数}$$

が成り立っている。ただし、 $A^0 = E_n$ と理解する。A が正則のとき A^{-1} があるが、これも n 次の正方行列である。したがって $A^{-k} = (A^{-1})^k$ が考えられるがこれは A^k の逆行列になっている。実際、

$$A^{-k}A^k = \overbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}^{k}\overbrace{A\cdots A}^{k} = \overbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}^{k-1} E_n \overbrace{A\cdots A}^{k-1}$$

なので、$A^{-1}E_n = A^{-1}$ だから帰納的に $A^{-k}A^k = E_n$ が言える。$A^kA^{-k} = E_n$ も同じように確かめられる。このことを用いると、上の指数法則は k, ℓ が任意の整数でも成り立っている事が分かる。

一般に A, B を n 次の正方行列とすると、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。これを確かめよう。それには $C = B^{-1}A^{-1}$ とおくとき、

$$C(AB) = (AB)C = E_n$$

を示せばよい。実際、

$$\begin{aligned} C(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n, \\ (AB)C &= ABB^{-1}A^{-1} = AE_nA^{=1} = AA^{-1} = E_n \end{aligned}$$

なので、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が示せた。

また、$(A^{-1})^{-1} = A$ である。これは逆行列の定義から明らか。

練習 8.1 行列の基本変形を行い、次の 3×3 行列の逆行列を求めよ。

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$